



Hugo Filipe  
Cunha Cabeleira

**Elastoplasticidade Clássica: Implementação  
Numérica e Análise do Efeito do Tipo de Lei do  
Encruamento**





**Hugo Filipe  
Cunha Cabelreira**

**Elastoplasticidade Clássica: Implementação  
Numérica e Análise do Efeito do Tipo de Lei do  
Encruamento**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob orientação científica de Joaquim Alexandre Mendes de Pinho da Cruz, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro



## **O júri/The Jury**

Presidente/President

**Professor Doutor Ricardo José Alves de Sousa**

Professor Auxiliar com Agregação do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro

Vogais/Committee

**Doutor Carlos André Soares Couto**

Estagiário de Pós-doutoramento do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Aveiro

**Professor Doutor Joaquim Alexandre Mendes de Pinho da Cruz**

Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro (orientador)



## **agradecimentos/ acknowledgements**

Em primeiro lugar, quero agradecer profundamente ao meu orientador, o Professor Joaquim Alexandre Pinho da Cruz, por todo o apoio, pela disponibilidade e, acima de tudo, a amizade que me proporcionou ao longo do meu percurso académico. Por todas as horas passadas no seu gabinete, por todo o apoio e toda a motivação dada ao longo da elaboração desta dissertação. Quero também, desde já, referir que sem o seu apoio e a sua ajuda não seria possível a conclusão deste trabalho.

Agradecer aos meus Pais, Alberto e Palmira, por tudo o que de bom me deram na vida, pela oportunidade que me proporcionaram em concluir estudos no seio de uma família com tantas dificuldades e, além disso, por todos os ensinamentos inculcados, que me ajudaram na conclusão deste trabalho e a saber enfrentar os problemas com calma e serenidade

Quero também agradecer à minha namorada, Ana, por todo o apoio incondicional dado, toda a paciência e a ajuda que me proporcionou. Agradecer-lhe por me ter acompanhado por todo o meu percurso académico e por ter sido fundamental na conclusão deste trabalho.

Por fim, quero agradecer aos meus colegas e amigos, por toda a ajuda e amizade dada nos momentos bons e nos menos bons, e por estarem sempre do meu lado ao longo deste longo percurso. Aproveito também para agradecer à grande academia da Universidade de Aveiro e ao Departamento de Engenharia Mecânica, por tudo que me deram, pelo acolhimento e pelas lindas infraestruturas situadas à beira-mar.





## Palavras-chave

Elastoplasticidade Clássica; Efeito de Bauschinger; Encruamento Linear; Leis de Encruamento Isotrópico, Cinemático, Misto e Independente; Matlab

## Resumo

O carregamento de componentes estruturais conduz geralmente a um comportamento elástico dos materiais que os constituem. Todavia, várias aplicações de engenharia envolvem o surgimento de fenómenos de elastoplasticidade. Neste contexto, o método dos elementos finitos pode revelar-se uma ferramenta particularmente útil e versátil para a modelação desses fenómenos, o que muitas vezes pode ser efetuado com base na hipótese da ocorrência de pequenas transformações.

A elastoplasticidade clássica consiste num modelo baseado no critério de cedência de von Mises com uma lei de plasticidade associada, a condição de consistência de Prager, as condições de carga-descarga de Kuhn-Tucker e, em geral, uma lei de encruamento isotrópico linear. No entanto, é sabido que em situações de reversão de carga este tipo de lei de encruamento não permite simular o efeito de Bauschinger, sendo assim usualmente utilizada uma lei de encruamento cinemático ou uma lei mista. Deste modo, será importante analisar qual o efeito da consideração de diferentes tipos de lei de encruamento nos resultados de modelações numéricas de plasticidade com reversão de carga.

Neste contexto, os principais objetivos deste trabalho são: (i) a implementação em Matlab do modelo de Elastoplasticidade Clássica e das principais leis de encruamento linear disponíveis; (ii) a modelação numérica de ensaios com reversão de carga; (iii) a análise e a validação dos resultados obtidos na simulação do comportamento elastoplástico de metais.



**Keywords**

Classical Elastoplasticity; Bauschinger Effect; Linear Hardening; Isotropic, Kinematic, Mixed and Independent Hardening Rules; Matlab

**Abstract**

Loading structural elements can generally lead to an elastic behaviour of their materials. Nevertheless, various engineering applications involve elastoplasticity. In this context, the finite element method may be a useful and versatile tool for modelling these phenomena, which may often be made assuming the hypothesis of small transformations.

The classical elastoplasticity consists of a model based on the von Mises yield criterion with an associated plastic law, Prager's consistency condition and the Kuhn-Tucker conditions, and, in general, a linear isotropic hardening rule. However, it is known that in situations involving load reversal this type of hardening rule doesn't allow to simulate the Bauschinger effect, being therefore usually used the kinematic or the mixed hardening rules. Thus, it's important to analyze the effect of considering different types of hardening rule on the results of numerical modelling of plasticity phenomena involving load reversal.

In this context, the main objectives of this work are: (i) the Matlab's implementation of both the Classical Elastoplasticity model and the main available linear hardening rules; (ii) the numerical modelling of situations involving load reversal; (iii) the analysis and validation of the results obtained in the simulation of the elastoplastic behaviour of metals.



# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>v</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Enquadramento . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	3
1.3 Guia de Leitura . . . . .	3
<b>2 Elastoplasticidade Clássica</b>	<b>5</b>
2.1 Aspetos Fundamentais . . . . .	5
2.2 Formulação 1D Infinitesimal . . . . .	9
2.3 Formulação 1D Discreta . . . . .	13
<b>3 Modelação e Resultados</b>	<b>17</b>
3.1 O Programa Plast1D . . . . .	17
3.2 Problemas de Elastoplasticidade Estrutural com Reversão de Carga . . . .	24
3.2.1 Problema 1 – Barra Simplesmente Apoiada . . . . .	24
3.2.2 Problema 2 – Estrutura de Barras Biapoiada . . . . .	31
3.2.3 Problema 3 – Barras em Paralelo . . . . .	38
3.2.4 Problema 4 – Treliça . . . . .	45
<b>4 Considerações Finais</b>	<b>55</b>
4.1 Conclusões Gerais . . . . .	55
4.2 Propostas para Trabalho Futuro . . . . .	56
<b>Anexos</b>	<b>56</b>
<b>A Fluxograma do Programa Plast1D</b>	<b>57</b>
<b>B Programa Plast1D</b>	<b>59</b>
<b>C Programa do Problema 1</b>	<b>63</b>

<b>D Programa do Problema 2</b>	<b>67</b>
<b>E Programa do Problema 3</b>	<b>71</b>
<b>F Programa do Problema 4</b>	<b>75</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>78</b>

# Lista de Figuras

2.1	Modelo representativo do encruamento isotrópico. Adapt. [10]. . . . .	7
2.2	Modelo representativo dos encruamentos isotrópico e cinemático para uma carga uniaxial de tração seguida de compressão com representação do efeito de Bauschinger. Adapt. [11]. . . . .	7
2.3	Modelo representativo do encruamento cinemático. Adapt. [10]. . . . .	7
2.4	Modelo representativo do encruamento misto. Adapt. [10]. . . . .	8
2.5	Modelo representativo do encruamento independente. Adapt. [12]. . . . .	8
2.6	Carregamento 1D de barra com comportamento elastoplástico. Adapt. [13].	10
3.1	Barra simplesmente apoiada com força ou deslocamento imposto. . . . .	24
3.2	Representação da curva tensão-deformação adimensionalizada para o Problema 1, com $\gamma = 0.4$ e força imposta. Adapt. [15]. . . . .	25
3.3	Representação da curva tensão-deformação adimensionalizada para o Problema 1, com $\gamma = 0.4$ e deslocamento imposto. Adapt. [15]. . . . .	27
3.4	Curvas tensão-deformação para os modelos de encruamento isotrópico, cinemático e misto, com força imposta para o problema 1. . . . .	30
3.5	Curvas tensão-deformação para os modelos de encruamento isotrópico, cinemático e misto, com deslocamento imposto para o problema 1. . . . .	30
3.6	Curvas tensão-deformação para deslocamento imposto e lei de encruamento (a) isotrópico, (b) cinemático e (c) misto ( $\beta = 0.5$ ) com 4 ciclos de carga do problema 1. . . . .	32
3.7	Curvas tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento misto com (a) $\beta = 0.2$ (b) $\beta = 0.5$ (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$ para o problema 1. . . . .	33
3.8	Estrutura biapoiada constituída por duas barras, com força imposta na sua interface. Adapt. [15]. . . . .	33
3.9	Curva força-deslocamento para força imposta e lei de encruamento (a) isotrópico (b) cinemático e (c) misto ( $\beta = 0.5$ ) para o problema 2. . . . .	39
3.10	Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento isotrópico do (a) elemento A e (b) elemento B para o problema 2. . . . .	40
3.11	Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento cinemático do (a) elemento A e (b) elemento B para o problema 2. . . . .	41
3.12	Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento misto do (a) elemento A e (b) elemento B para o problema 2. . . . .	42
3.13	Barras verticais em paralelo ligadas a um elemento rígido móvel. Adapt. [15].	43
3.14	Curva força-deslocamento para força imposta e lei de encruamento (a) isotrópico, (b) cinemático e (c) misto do problema 3. . . . .	46

3.15	Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento isotrópico do (a) elemento 1 e (b) elemento 2 para o problema 3. . . . .	47
3.16	Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento cinemático do (a) elemento 1 e (b) elemento 2 para o problema 3. . . . .	48
3.17	Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento misto do (a) elemento 1 e (b) elemento 2 para problema 3. . . . .	49
3.18	Treliça constituída por três barras, com força imposta na sua extremidade livre. Adapt. [15]. . . . .	50
3.19	Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento isotrópico do (a) elemento 1, (b) elemento 2 e (c) elemento 3 do problema 4. . . . .	51
3.20	Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento cinemático do (a) elemento 1, (b) elemento 2 e (c) elemento 3 do problema 4. . . . .	52
3.21	Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento misto do (a) elemento 1, (b) elemento 2 e (c) elemento 3 do problema 4. . . . .	53
3.22	Curva força-deslocamento para força imposta e lei de encruamento (a) isotrópico, (b) cinemático e (c) misto do problema 4. . . . .	54



# Lista de Tabelas

2.1	Algoritmo para a formulação discreta da Elastoplasticidade Clássica com encruamento misto linear . . . . .	15
3.1	Evolução das tensões nos elementos A e B com a carga aplicada, para o modelo de encruamento isotrópico . . . . .	36
3.2	Evolução das tensões nos elementos A e B com a carga aplicada, para o modelo de encruamento cinemático . . . . .	37
3.3	Evolução das tensões nos elementos A e B com a carga aplicada, para o modelo de encruamento independente . . . . .	37
3.4	Tabela de parâmetros mecânicos considerados . . . . .	38
3.5	Valores analíticos para tensão e carga dos elementos A e B para a lei de encruamento isotrópico . . . . .	40
3.6	Valores analíticos para tensão e carga dos elementos A e B para a lei de encruamento cinemático . . . . .	41
3.7	Valores analíticos para tensão e carga dos elementos A e B para a lei de encruamento independente . . . . .	41
3.8	Evolução da tensão com a carga aplicada na estrutura, para o modelo de encruamento isotrópico . . . . .	43
3.9	Evolução da tensão com a carga aplicada na estrutura, para o modelo de encruamento cinemático . . . . .	44
3.10	Evolução da tensão com a carga aplicada na estrutura, para o modelo de encruamento misto . . . . .	44
3.11	Valores analíticos para tensão e carga dos elementos 1 e 2 para a lei de encruamento isotrópico . . . . .	45
3.12	Valores analíticos para tensão e carga dos elementos 1 e 2 para a lei de encruamento cinemático . . . . .	46
3.13	Valores analíticos para tensão e carga dos elementos 1 e 2 para a lei de encruamento misto . . . . .	46



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Enquadramento

Em termos genéricos, os componentes estruturais podem apresentar três tipos distintos de comportamento [1]:

- Estático;
- Quase-estático;
- Dinâmico.

No caso do carregamento não variar com o tempo ou do tempo de aplicação gradual da carga ser suficientemente grande, de modo a que as acelerações envolvidas na estrutura sejam suficientemente pequenas para poderem ser desprezadas, diz-se que o comportamento é do tipo estático. Na circunstância de se ter um carregamento associado a variações de baixa frequência, as acelerações serão baixas e podem ser desprezadas. Neste caso, o efeito da inércia do sistema é desprezável e a sua resposta varia com o tempo como se fosse um problema estático, pelo que se denomina este tipo de problema de quase-estático. Por fim, quando as frequências de carregamento são significativas, o efeito das forças de inércia não é desprezável, sendo então o problema de natureza dinâmica. No presente trabalho não se considera o efeito da inércia do sistema.

Por outro lado, o comportamento dos componentes estruturais pode ainda ser considerado linear ou não-linear. No comportamento linear é válido o princípio da sobreposição linear, havendo proporcionalidade direta entre forças e deslocamentos:  $F = Ku$ , pelo que pode ser aplicada ao problema a metodologia de resolução de sistemas de equações lineares da Álgebra Linear. No entanto, a ocorrência de fenómenos, tais como a alteração significativa de uma geometria durante o processo de deformação de um modelo em estudo, a fendilhação, a cedência de um material e a encurvadura encontram-se associados a comportamentos de carácter não-linear. Existem quatro principais fontes de não-linearidade nas estruturas mecânicas [2]:

- Não-linearidade material: a relação tensão-deformação é do tipo não-linear (elasticidade não-linear, plasticidade, fluência, etc.);
- Não-linearidade geométrica: as relações deformação-deslocamento incluem termos de ordem superior (grandes deslocamentos, grandes deformações e grandes rotações);

- Não-linearidade de forças: a direção ou a magnitude das forças aplicadas nas fronteiras da estrutura variam com a deformação desta;
- Não-linearidade cinemática: deslocamento aplicados nas fronteiras da estrutura variam com a deformação desta. Os problemas de contacto pertencem a esta categoria.

Na generalidade dos casos, estas quatro não-linearidades podem existir simultaneamente num problema, o que resulta numa formulação complexa e num custo computacional que pode ser proibitivo. A existência de não-linearidades leva a que a proporcionalidade direta entre forças e deslocamentos deixe de ser válida, caracterizando-se uma análise estática ou quase-estática pelo facto de a rigidez depender dos deslocamentos, tendo-se  $K = K(u)$  [1]. Na resolução destes problemas pode recorrer-se a processos incrementais-iterativos, sendo o mais usual o método de Newton-Raphson, determinando-se o valor de deslocamento causado para cada um dos vários incrementos de carga.

Embora o carregamento de componentes estruturais possa conduzir a um comportamento elástico dos materiais que os constituem, várias aplicações de engenharia envolvem o surgimento de fenómenos de elastoplasticidade. Neste contexto, o método dos elementos finitos pode revelar-se uma ferramenta particularmente útil e versátil para a modelação desses fenómenos, o que muitas vezes pode ser efetuado com base na hipótese da ocorrência de pequenas transformações, i.e., de pequenos deslocamentos e de pequenas rotações e deformações. Esta hipótese exclui a existência de não-linearidades do tipo geométrico, de forças e cinemático. Assim, no presente trabalho vai considerar-se apenas a não-linearidade do tipo material. Neste contexto, o comportamento dos materiais, nomeadamente dos metais, pode ser assumido, em termos de relação tensão-deformação e dentro de certos limites, como reversível e linear. Esta zona linear elástica é delimitada pelo limite de elasticidade, i.e., a tensão acima da qual o material deixa de se comportar elasticamente. Se esse limite for ultrapassado, o corpo fica permanentemente deformado após a retirada da carga e diz-se que sofreu uma deformação plástica, apresentando um comportamento plástico. Em geral, considera-se que a deformação plástica de um material metálico ocorre sem qualquer mudança de volume e que a pressão hidrostática não influencia a cedência do material [3].

Neste contexto, a Elastoplasticidade Clássica é um modelo que permite abordar de um modo simplificado o comportamento de materiais metálicos envolvendo o desenvolvimento de deformação plástica, não sendo contemplados vários fenómenos complexos, tais como a viscoplasticidade, a termoplasticidade, o dano, as transformações finitas, etc. Não obstante a sua simplicidade, este modelo tem vindo a ser frequentemente utilizado na simulação do comportamento elastoplástico de materiais metálicos. Neste modelo considera-se o critério de cedência de von Mises com uma lei de plasticidade associada, a condição de consistência de Prager, as condições de carga-descarga de Kuhn-Tucker e, em geral, uma lei de encruamento isotrópico linear. No entanto, é sabido que em situações de reversão de carga este tipo de lei de encruamento não permite simular o efeito de Bauschinger, sendo assim usualmente utilizada uma lei de encruamento cinemático ou uma lei de encruamento mista. Deste modo, será importante analisar qual o efeito da consideração de diferentes tipos de lei de encruamento nos resultados de modelações numéricas de plasticidade com reversão de carga.

## 1.2 Objetivos

Os principais objetivos deste trabalho são: (i) a implementação em Matlab do modelo de Elastoplasticidade Clássica e das principais leis de encruamento linear disponíveis; (ii) a modelação numérica de ensaios com reversão de carga; (iii) a análise e a validação dos resultados obtidos na simulação do comportamento elastoplástico de metais.

## 1.3 Guia de Leitura

A presente dissertação é composta por 4 capítulos. No Capítulo 1 apresenta-se uma breve introdução à temática em estudo, os principais objetivos e a estrutura do documento.

No Capítulo 2 aborda-se a teoria da Elastoplasticidade Clássica, apresentando-se os conceitos fundamentais associados às suas formulações geral, unidimensional infinitesimal e unidimensional discreta.

Posteriormente, no Capítulo 3 apresenta-se o programa Plast1D, cuja estrutura é, bloco a bloco, detalhadamente explicada. São apresentados quatro problemas de elastoplasticidade estrutural com barras sujeitas a reversão de carga. De modo a ilustrar como funciona este modelo de elastoplasticidade para as diferentes leis de encruamento linear, alguns problemas são primeiramente resolvidos de modo analítico, servindo os seus resultados para validar posteriormente os obtidos numericamente com base no programa Plast1D.

Por fim, no Capítulo 4 são apresentadas as conclusões gerais deste trabalho, bem como algumas perspetivas de trabalho futuro.



## Capítulo 2

# Elastoplasticidade Clássica

*Neste capítulo aborda-se a teoria da Elastoplasticidade Clássica, apresentando-se os conceitos fundamentais associados às suas formulações geral, unidimensional infinitesimal e unidimensional discreta*

---

### 2.1 Aspetos Fundamentais

Os aspetos fundamentais relacionados com a Elastoplasticidade Clássica correspondem a [4–6]:

1. Decomposição aditiva do tensor das deformações totais  $\epsilon$  nas componentes elástica  $\epsilon^e$  e plástica  $\epsilon^p$ :

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p, \quad (2.1)$$

ou em termos de taxas de variação instantânea:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p; \quad (2.2)$$

2. Comportamento elástico descrito pela lei de Hooke:

$$\sigma = \mathbf{D} : \epsilon^e, \quad (2.3)$$

em que  $\sigma$  é o tensor das tensões de Cauchy e  $\mathbf{D}$  é o tensor de elasticidade, ou em termos de taxas de variação instantânea:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D} : \dot{\epsilon}^e; \quad (2.4)$$

3. Critério de plasticidade: permite definir quer o estado de tensão de um determinado ponto material quer a transição entre os comportamentos elástico e plástico. Uma relação do tipo  $f = 0$  define, no espaço das tensões, a superfície de limite de elasticidade, sendo  $f$  uma função escalar que pode depender do estado de tensão,

do valor da tensão de cedência, etc., dependendo do tipo de lei de encruamento (discutida em seguida). A inequação  $f < 0$  encontra-se associada ao domínio elástico. No entanto, a condição  $f = 0$  pode corresponder a fenómenos seja de elasticidade seja de plasticidade. Note-se que não são admissíveis quaisquer estados para os quais  $f > 0$  [6]. O critério de plasticidade de von Mises é um dos mais utilizados na análise de fenómenos de plasticidade em materiais metálicos;

4. Lei de encruamento: controla, logo que se inicia a deformação plástica, a evolução da superfície de limite de elasticidade com base na evolução da deformação plástica. Os tipos de lei de encruamento mais utilizadas são o isotrópico, o cinemático e o misto. A lei de encruamento isotrópico é caracterizada pela expansão uniforme, à medida que decorre o fenómeno de plasticidade, da superfície de limite de elasticidade no espaço das tensões (ver a figura 2.1). Em situações de reversão de carga, este tipo de lei de encruamento não permite simular o efeito de Bauschinger, sendo assim usualmente utilizada uma lei de encruamento cinemático (ver a figura 2.2) ou uma lei mista. A lei de encruamento cinemático [7] é caracterizada pela translação sem alteração de forma, à medida que decorre o fenómeno de plasticidade, da superfície de limite de elasticidade no espaço das tensões (ver a figura 2.3). A grande diferença entre estas duas leis de encruamento reside no facto de, após uma reversão de carga, no encruamento isotrópico a cedência ocorrer para uma variação de tensão correspondente ao dobro do valor da tensão de início da reversão, enquanto no encruamento cinemático a cedência ocorrer para uma variação de tensão correspondente ao dobro da tensão de cedência (ver figura 2.2). Por fim, a lei de encruamento misto corresponde a uma combinação das duas anteriores, pelo que se caracteriza pela translação com alteração de forma, à medida que decorre o fenómeno de plasticidade, da superfície de limite de elasticidade no espaço das tensões (ver a figura 2.4). Na prática os materiais apresentam um encruamento combinado (cinemático e isotrópico), especialmente os metais policristalinos [8]. Na verdade, a tensão de cedência aumenta devido ao encruamento plástico, mas diminui quando há inversão de direção de deformação. Este fenómeno está relacionado com as deslocções e o seu movimento nos metais sujeitos a deformação a frio. Um dos casos particulares do encruamento misto, para além dos encruamentos isotrópico e cinemático, é o encruamento independente, em que o encruamento só afeta a resistência na direção de carga. Assim, a deformação plástica de tração (compressão) só produz efeito na tensão de cedência à tração (compressão), tal como se ilustra na figura 2.5. Atenda-se a que em situações de carregamento monótono todos os modelos de encruamento produzem os mesmos resultados;

5. Lei de plasticidade: relaciona, aquando da ocorrência do fenómeno de plastificação, o tensor das tensões com a evolução do tensor das deformações plásticas. Uma lei de plasticidade associada <sup>1</sup> é definida por

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Uma lei de plasticidade diz-se associada quando se utiliza o mesmo potencial para descrever o comportamento plástico em termos quer da superfície de limite de elasticidade quer da deformação plástica [9].



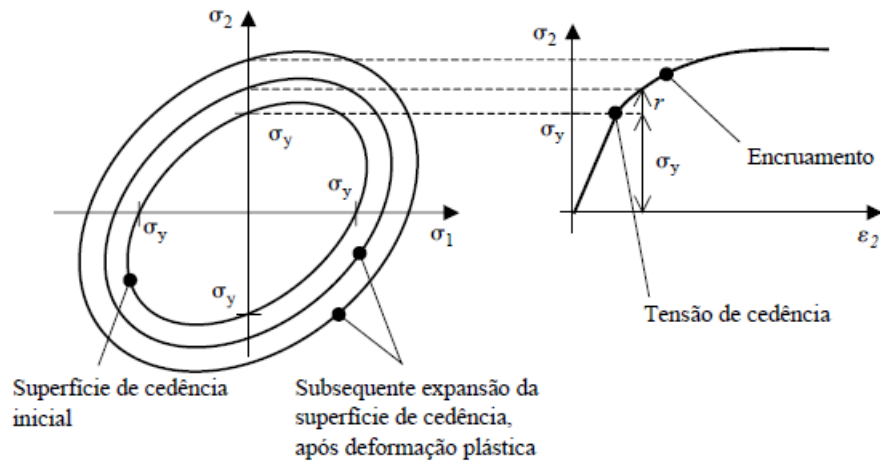


Figura 2.1: Modelo representativo do encruamento isotrópico. Adapt. [10].

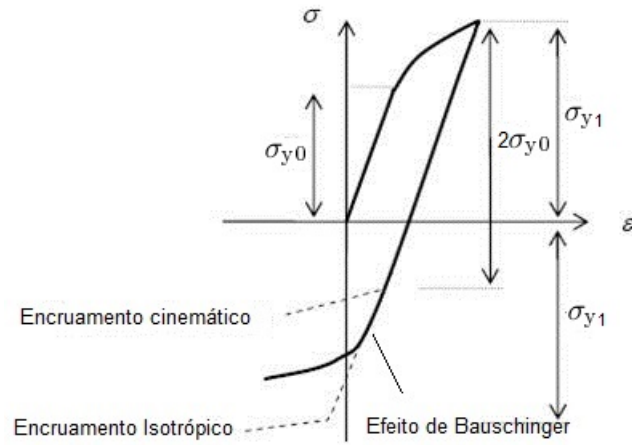


Figura 2.2: Modelo representativo dos encruamentos isotrópico e cinemático para uma carga uniaxial de tração seguida de compressão com representação do efeito de Bauschinger. Adapt. [11].

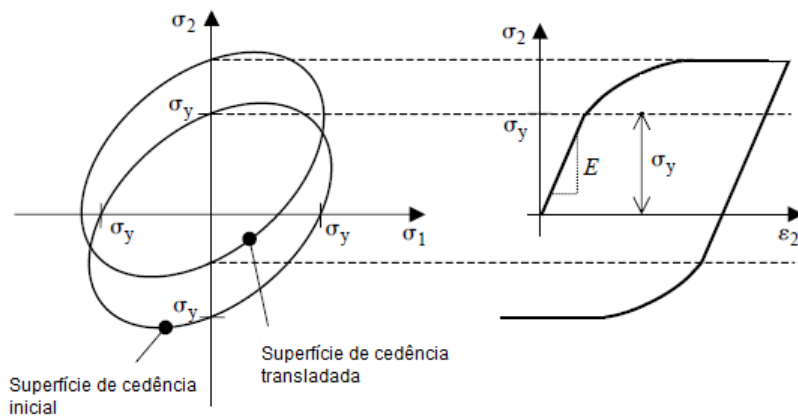


Figura 2.3: Modelo representativo do encruamento cinemático. Adapt. [10].

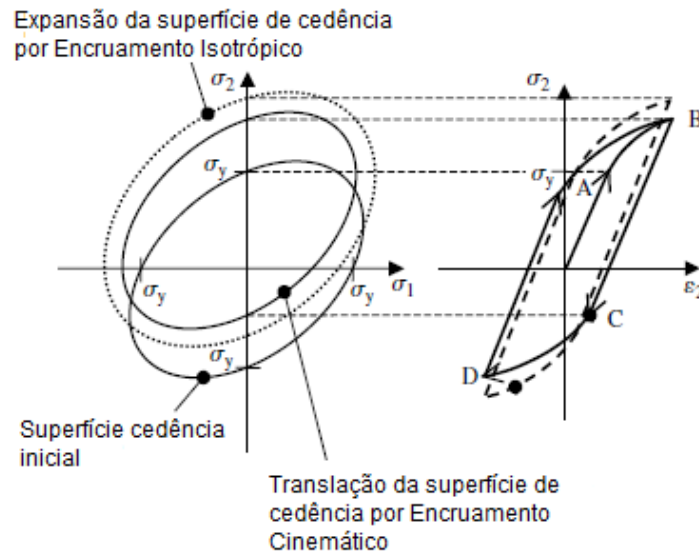


Figura 2.4: Modelo representativo do encruamento misto. Adapt. [10].

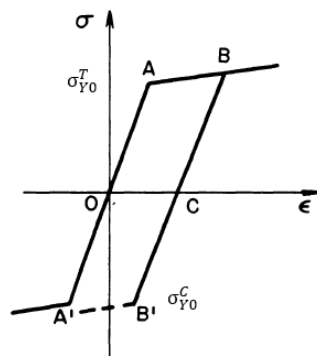


Figura 2.5: Modelo representativo do encruamento independente. Adapt. [12].

em que o escalar  $\dot{\lambda} \geq 0$  é designado multiplicador plástico. O multiplicador plástico é positivo quando ocorre deformação plástica e nulo em caso contrário;

6. Condição de consistência de Prager: obriga a que na ocorrência do fenómeno de plastificação os pontos representativos de estados de tensão associados ao desenvolvimento de deformação plástica permaneçam na superfície de limite de elasticidade. Corresponde a:

$$\dot{\lambda} \dot{f} = 0; \quad (2.6)$$

7. Condições de carga-descarga de Kuhn-Tucker: correspondem a

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad (2.7)$$

$$f \leq 0 \text{ e} \quad (2.8)$$

$$\dot{\lambda} f = 0 \quad (2.9)$$

e permitem, após se iniciar deformação plástica e em conjunto com a condição de consistência de Prager, determinar se a natureza da deformação é ou elástica ou plástica. De acordo com estas relações, o comportamento do material será:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Elástico} &\Leftrightarrow \begin{cases} f < 0 \Rightarrow \dot{\lambda} = 0 \text{ (deformação elástica)} \\ f = 0 \text{ e } \dot{f} < 0 \Rightarrow \dot{\lambda} = 0 \text{ (descarga elástica);} \\ f = 0, \dot{f} = 0 \text{ e } \dot{\lambda} = 0 \text{ (carga neutra)} \end{cases} \\ \bullet \text{ Plástico} &\Leftrightarrow f = 0, \dot{f} = 0 \text{ e } \dot{\lambda} > 0 \text{ (carga plástica),} \end{aligned}$$

não sendo admissíveis quaisquer evoluções em que se verifiquem simultaneamente as condições  $f = 0$  e  $\dot{f} > 0$  [6].

## 2.2 Formulação 1D Infinitesimal

Na abordagem à formulação 1D infinitesimal da Elastoplasticidade Clássica vão ser consideradas unicamente leis de encruamento lineares. Neste contexto, considere-se uma barra com comportamento elastoplástico sujeita a um carregamento uniaxial, tal como se ilustra na figura 2.6.

Constata-se que os valores iniciais da tensão de cedência  $\sigma_{y0}$  (tração) e  $-\sigma_{y0}$  (compressão) delimitam duas zonas distintas: uma linear elástica, interior, associada ao módulo de Young  $E$ , e outra elastoplástica, exterior, em que o material apresenta um encruamento linear associado ao módulo tangente  $E_t$ . Assim, a região elástica pode ser definida por [13]

$$E_{\emptyset} = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid -\sigma_{y0} < \sigma < \sigma_{y0}\}, \quad (2.10)$$

correspondendo os dois pontos de cedência inicial a

$$\partial E_{\emptyset} = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid \sigma = \pm \sigma_{y0}\}. \quad (2.11)$$

Deste modo, o fecho de  $E_{\emptyset}$  corresponde a

$$\bar{E}_{\emptyset} = E_{\emptyset} \cup \partial E_{\emptyset} = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid -\sigma_{y0} \leq \sigma \leq \sigma_{y0}\}. \quad (2.12)$$

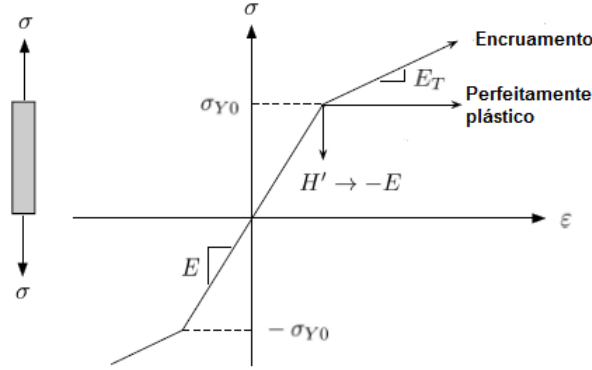


Figura 2.6: Carregamento 1D de barra com comportamento elastoplástico. Adapt. [13].

De acordo com a secção anterior, na formulação 1D infinitesimal da Elastoplasticidade Clássica, tem-se:

1. Decomposição aditiva da deformação total  $\epsilon$  nas componentes elástica  $\epsilon^e$  e plástica  $\epsilon^p$ :

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p, \quad (2.13)$$

ou em termos de taxas de variação instantânea:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p; \quad (2.14)$$

2. Comportamento elástico descrito pela lei de Hooke:

$$\sigma = E\epsilon^e, \quad (2.15)$$

ou em termos de taxas de variação instantânea:

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon}^e; \quad (2.16)$$

3. Critério de plasticidade. A função  $f$  relativa ao critério de plasticidade de von Mises depende do tipo de lei de encruamento linear, correspondendo a:

- (a) Encruamento isotrópico:

$$f(\sigma, \sigma_Y) = |\sigma| - \sigma_Y = 0; \quad (2.17)$$

- (b) Encruamento cinemático:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma - \alpha| - \sigma_{Y0} = 0; \quad (2.18)$$

- (c) Encruamento misto:

$$f(\sigma, \alpha, \sigma_Y) = |\sigma - \alpha| - \sigma_Y = 0, \quad (2.19)$$

em que  $\sigma_Y$  corresponde ao valor da tensão de cedência,  $\sigma_{Y0}$  é o valor inicial da tensão de cedência e  $\alpha$  corresponde à tensão de retorno (*back stress*) que controla o encruamento cinemático;

4. Lei de encruamento:

(a) Encruamento isotrópico:

$$\dot{\sigma}_Y = H|\dot{\epsilon}^p|; \quad (2.20)$$

(b) Encruamento cinemático:

$$\dot{\alpha} = H\dot{\epsilon}^p; \quad (2.21)$$

(c) Encruamento misto:

$$\dot{\sigma}_Y = (1 - \beta)H|\dot{\epsilon}^p| \text{ e} \quad (2.22)$$

$$\dot{\alpha} = \beta H\dot{\epsilon}^p, \quad (2.23)$$

em que  $H$  corresponde ao módulo plástico e  $\beta$  é um parâmetro de peso que varia entre 0 (encruamento isotrópico) e 1 (encruamento cinemático), e além disso o caso particular do encruamento independente para valores de  $\beta = 0.5$ .

5. Lei de plasticidade:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}; \quad (2.24)$$

6. Condição de consistência de Prager:

$$\dot{\lambda} \dot{f} = 0; \quad (2.25)$$

7. Condições de carga-descarga de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad (2.26)$$

$$f \leq 0 \text{ e} \quad (2.27)$$

$$\dot{\lambda} f = 0. \quad (2.28)$$

Assim, substituindo a equação 2.14 na equação 2.16 obtém-se

$$\dot{\sigma} = E (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p). \quad (2.29)$$

Por outro lado, a substituição da equação 2.24 na expressão anterior resulta em

$$\dot{\sigma} = E \left( \dot{\epsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right). \quad (2.30)$$

Numa situação de deformação plástica, sendo o multiplicador plástico  $\dot{\lambda} \geq 0$ , de acordo com a condição de consistência de Prager (equação 2.25), tem-se obrigatoriamente que  $\dot{f} = 0$ . A aplicação desta condição aos critérios de plasticidade para os vários tipos de encruamento considerados resulta, de acordo com a regra de derivação em cadeia, em

1. Encruamento isotrópico:

$$\dot{f}(\sigma, \sigma_Y) = \text{sign}(\sigma) \dot{\sigma} - \dot{\sigma}_Y = 0; \quad (2.31)$$

2. Encruamento cinemático:

$$\dot{f}(\sigma, \alpha) = \text{sign}(\sigma - \alpha)(\dot{\sigma} - \dot{\alpha}) - \dot{\sigma}_{Y0} = 0; \quad (2.32)$$

## 3. Encruamento misto:

$$\dot{f}(\sigma, \alpha, \sigma_Y) = \text{sign}(\sigma - \alpha)(\dot{\sigma} - \dot{\alpha}) - \dot{\sigma}_Y = 0; \quad (2.33)$$

em que  $\dot{\sigma}_{Y0}$  é nulo no caso do encruamento cinemático. Deste modo, verifica-se que a expressão 2.33 degenera nas expressões 2.31 e 2.32 no caso de  $\dot{\alpha} = 0$  e  $\dot{\sigma}_Y = \dot{\sigma}_{Y0} = 0$ , respectivamente. Por outro lado, as expressões para a lei de encruamento 2.22 e 2.23, associadas ao encruamento misto, degeneram na do encruamento isotrópico (equação 2.20), para  $\beta = 0$ , e na do encruamento cinemático (equação 2.21), para  $\beta = 1$ . Como para estes valores de  $\beta$  são verificadas as condições requeridas para o critério de plasticidade acima referidas (i.e.,  $\dot{\alpha} = 0$ , se  $\beta = 0$ , e  $\dot{\sigma}_Y = \dot{\sigma}_{Y0} = 0$ , se  $\beta = 1$ ), tem-se que a análise do caso do encruamento misto permite obter de modo direto os resultados para os casos do encruamento isotrópico e do encruamento cinemático. Neste contexto, procede-se em seguida apenas à determinação do algoritmo numérico do modelo de Plasticidade Clássica unidimensional para o encruamento misto, sendo os algoritmos relativos aos restantes tipos de encruamento obtidos posteriormente por seleção adequada do valor de  $\beta$ .

Neste contexto, substituindo a equação 2.24 nas expressões 2.22 e 2.23, e estas últimas e a equação 2.30 na expressão 2.33 e resolvendo em função do multiplicador plástico, obtém-se

$$\dot{\lambda} = \frac{\text{sign}(\sigma - \alpha)E\dot{\epsilon}}{E + H}. \quad (2.34)$$

Deste modo conclui-se que o multiplicador plástico é o mesmo para os três tipos de lei de encruamento consideradas. Atenda-se ainda a que das equações 2.19 e 2.24 se tem que

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma - \alpha), \quad (2.35)$$

pelo que

$$\dot{\epsilon}_p = \begin{cases} +\dot{\lambda}, & \Leftarrow (\sigma - \alpha) > 0 \\ -\dot{\lambda}, & \Leftarrow (\sigma - \alpha) < 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

pelo que perante uma carga correspondente a  $\sigma > \alpha$  (i.e., tração relativamente à tensão de retorno) a deformação plástica  $\dot{\epsilon}_p$  é positiva, sendo negativa perante uma carga correspondente a  $\sigma < \alpha$  (i.e., compressão relativamente à tensão de retorno).

Por fim, substituindo ainda a equação 2.34 na expressão 2.30, tem-se que

$$\dot{\sigma} = \left( \frac{EH}{E + H} \right) \dot{\epsilon}. \quad (2.37)$$

Todavia, atendendo a que o módulo tangente é definido pela relação

$$\dot{\sigma} = E_t \dot{\epsilon}, \quad (2.38)$$

conclui-se que este corresponde a

$$E_t = \frac{EH}{E + H}. \quad (2.39)$$

Deste modo, considerando em simultâneo a possibilidade de ocorrência de comportamento elástico e elastoplástico, o módulo tangente<sup>2</sup> pode ser generalizado do seguinte

<sup>2</sup>Note-se que no caso da elastoplasticidade 1D o módulo elastoplástico tangente coincide com o módulo consistente, ao contrário do que ocorre para a elastoplasticidade 2 ou 3 dimensões [6].

modo:

$$E_t = \begin{cases} E & \Leftarrow \dot{\lambda} = 0 \\ \frac{EH}{E+H} & \Leftarrow \dot{\lambda} > 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

### 2.3 Formulação 1D Discreta

Para se proceder à implementação do método incremental-iterativo de Newton-Raphson é necessário obter uma versão discreta das equações do modelo da Elastoplasticidade Clássica. Neste contexto, o método numérico de resolução do problema de Elasticidade Clássica consiste no seguinte: conhecendo as propriedades no instante  $n$  ( $\epsilon_n^p$ ,  $\epsilon_n^p$  e  $\sigma_n$ , por exemplo) e obtendo o incremento da deformação  $\Delta\epsilon$  (pelo método dos elementos finitos, por exemplo) pretende-se obter os novos valores dessas variáveis para o instante  $n + 1$ , definido pelo passo incremental<sup>3</sup>. Assim, de acordo com a secção anterior, na formulação 1D discreta da Elastoplasticidade Clássica, consideram-se

1. Decomposição aditiva do incremento da deformação total  $\epsilon$  nas componentes elástica  $\epsilon^e$  e plástica  $\epsilon^p$ :

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon^e + \Delta\epsilon^p; \quad (2.41)$$

2. Comportamento elástico descrito pela lei de Hooke:

$$\Delta\sigma = E\Delta\epsilon^e; \quad (2.42)$$

3. Lei de encruamento linear misto:

$$\Delta\sigma_Y = (1 - \beta)H\Delta\lambda \text{ e} \quad (2.43)$$

$$\Delta\alpha = \beta H\Delta\epsilon^p; \quad (2.44)$$

4. Lei de plasticidade:

$$\Delta\epsilon^p = \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Big|_{n+1}; \quad (2.45)$$

Assim, substituindo a equação 2.41 na equação 2.42 obtém-se

$$\Delta\sigma = E(\Delta\epsilon - \Delta\epsilon^p), \quad (2.46)$$

o que corresponde a

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{tent}} - E\Delta\epsilon^p, \quad (2.47)$$

com

$$\sigma_{n+1}^{\text{tent}} = \sigma_n + E\Delta\epsilon, \quad (2.48)$$

em que  $\sigma_{n+1}^{\text{tent}}$  corresponde à tensão-tentativa e  $E\Delta\epsilon^p$  é o corretor plástico. Por outro lado, atendendo às relações 2.35 e 2.52, tem-se que a expressão 2.45 corresponde a

$$\Delta\epsilon^p = \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1} - \alpha_{n+1}); \quad (2.49)$$

---

<sup>3</sup>Este processo corresponde a um algoritmo de integração implícita da lei de comportamento elastoplástico.

Por outro lado, as relações 2.50 e 2.51 correspondem. de acordo com a relação 2.19, a

$$\sigma_{Y,n+1} = \sigma_{Y,n} + (1 - \beta)H\Delta\lambda \text{ e} \quad (2.50)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta H\Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1} - \alpha_{n+1}). \quad (2.51)$$

O objetivo é determinar o incremento do multiplicador plástico  $\Delta\lambda$ . Conhecida esta variável, poder-se-á passar ao incremento seguinte. Na realidade este parâmetro define a magnitude do corretor plástico, permitindo assim conhecer a  $\sigma_{n+1}$ .

Considerando a aplicação da condição de consistência discreta com base no critério de plasticidade de von Mises considerando para a lei de encruamento linear misto (equação 2.19), tem-se

$$f(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}, \sigma_{Y,n+1}) = |\sigma_{n+1} - \alpha_{n+1}| - \sigma_{Y,n+1} = 0, \quad (2.52)$$

o que obriga apenas a que uma solução associada ao domínio plástico esteja, no instante  $n + 1$ , na superfície de cedência. Substituindo as equações 2.47, 2.50 e 2.51 na expressão 2.52 e resolvendo em ordem ao incremento do multiplicador plástico, obtém-se

$$\Delta\lambda = \frac{f_{n+1}^{\text{tent}}}{E + H}, \quad (2.53)$$

em que

$$f_{n+1}^{\text{tent}} = |\sigma_{n+1}^{\text{tent}} - \alpha_n| - \sigma_{Y,n}. \quad (2.54)$$

Neste contexto, procede-se em seguida à apresentação do algoritmo para a formulação discreta da Elastoplasticidade Clássica com encruamento misto linear. Mais uma vez se realça o facto de os algoritmos para encruamento isotrópico linear e encruamento cinemático linear se podem obter considerando um fator  $\beta = 0$  para o encruamento isotrópico e  $\beta = 1$  para o encruamento cinemático [6, 13, 14].

Por fim, refira-se que o encruamento independente é obtido considerando  $\beta = 0.5$ . Este modelo é, do ponto de vista académico, interessante no sentido de explicar o comportamento do material quando se conjugam os dois modelos (cinemático e isotrópico) em iguais proporções. No seguimento deste trabalho o encruamento independente vai ser utilizado como termo de comparação com os modelos isotrópico e cinemático.



Tabela 2.1: Algoritmo para a formulação discreta da Elastoplasticidade Clássica com encruamento misto linear

- Para o instante  $n$ :
1. Previsão elástica: calcular
    - 1.1  $\sigma_{n+1}^{\text{tent}} = \sigma_n + E\Delta\epsilon$
    - 1.2  $\xi_{n+1}^{\text{tent}} = \sigma_{n+1}^{\text{tent}} - \alpha_n$
    - 1.4  $f_{n+1}^{\text{tent}} = |\xi_{n+1}^{\text{tent}}| - (\sigma_Y + (1 - \beta)H\lambda_n)$
  2. SE  $f_{n+1}^{\text{tent}} \leq 0$ , ENTÃO atualizar
    - 2.1  $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{tent}}$
    - 2.2  $\alpha_{n+1} = \alpha_n$
    - 2.3  $\lambda_{n+1} = \lambda_n$
  3. SENÃO correção plástica: calcular
    - 3.1  $\Delta\lambda = \frac{f_{n+1}^{\text{tent}}}{E+H}$
    - 3.2  $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{tent}} - \text{sign}(\xi_{n+1}^{\text{tent}}) E\Delta\lambda$
    - 3.3  $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \text{sign}(\xi_{n+1}^{\text{tent}}) \beta H\Delta\lambda$
    - 3.4  $\lambda_{n+1} = \lambda_{n+1} + \Delta\lambda$



## Capítulo 3

# Modelação e Resultados

*Neste capítulo apresenta-se o programa `Plast1D`, cuja estrutura é, bloco a bloco, detalhadamente explicada. São apresentados quatro problemas de elastoplasticidade estrutural com barras sujeitas a reversão de carga. De modo a ilustrar como funciona este modelo de elastoplasticidade para as diferentes leis de encruamento linear, alguns problemas são primeiramente resolvidos de modo analítico, servindo os seus resultados para validar posteriormente os obtidos numericamente com base no programa `Plast1D`*

---

### 3.1 O Programa `Plast1D`

O programa `Plast1D` de cálculo estrutural inicia-se pela definição do tipo de carregamento que vai ser usado, i.e., deformação (deslocamento) imposta (`tipocarreg = 0`) ou tensão (força) imposta (`tipocarreg = 1`). A variável `beta` define a lei de encruamento do material. Este escalar varia entre 0 e 1, afetando a natureza do tipo de de encruamento que está a ser usado. Quando `beta` experimenta um valor igual a 1, está-se perante uma lei do encruamento cinemático. Quando `beta` é igual a 0, o material respeita a lei de encruamento isotrópico. Quando  $0 < \text{beta} < 1$ , o modelo é uma combinação linear dos modelos cinemático e isotrópico, correspondendo o caso particular de `beta = 0.5` ao, como foi já referido, modelo independente. A definição do tipo de curva que se pretende imprimir é feita com base na variável `prttype`. Se o objetivo é o estudo das curvas tensão-deformação, então `prttype = 0`; se o objetivo é o estudo das curvas força-deslocamento, então `prttype = 1`. As linhas 1-33 exprimem esta parte do algoritmo e estão representadas na lista seguinte:

```
%% Plast1D
% Plasticidade de von Mises com encruamento isotrópico linear
% combinado com encruamento cinemático
prttype = 0;% variáveis a visualizar: (eps,sigm) = 0, (u,R) = 1
beta = 0.5 * [1,1];% isotropico = 0, cinemático = 1, misto > 0 & < 1
```

```

tipcarreg = 1;% tipo de carregamento: deslocamento = 0, força = 1
Pmax = 15;% carga máxima imposta [N]
umax=1;% deslocamento máximo imposto [mm]
nciclos=1;% número de ciclos: 0 a k
nppciclo=100;% número de pontos por ciclo
if tipcarreg == 0
    uimp = umax/nppciclo;% deslocamento imposto
    cargadesl=ones(nppciclo,1);cargadesl=ones(2*nppciclo,1);
    factorcarga=zeros(nppciclo*(1+4*nciclos),1);
    factorcarga(1:nppciclo)=cargadesl;
    if nppciclo >= 1
        for i=1:nciclos
            factorcarga(nppciclo*(1+(i-1)*4)+1:nppciclo*(3+(i-1)*4))=-1*cargadesl;
            factorcarga(nppciclo*(3+(i-1)*4)+1:nppciclo*(5+(i-1)*4))=cargadesl;
        end
    end
elseif tipcarreg == 1
    Pimp = Pmax/nppciclo;% carga imposta
    cargaif = repmat(1:nppciclo,1);cargaf = repmat(1:2*nppciclo,1);
    factorcarga=zeros(nppciclo*(1+4*nciclos),1);
    factorcarga(1:nppciclo)=cargaif; % determinar o fator de carga
    if nppciclo >= 1
        for i=1:nciclos
            factorcarga(nppciclo*(1+(i-1)*4)+1:nppciclo*(3+(i-1)*4))=nppciclo-1*cargaf;
            ;
            factorcarga(nppciclo*(3+(i-1)*4)+1:nppciclo*(5+(i-1)*4))=-1*nppciclo+
                cargaf;
        end
    end
end
end
end

```

Após a definição do tipo de carregamento (**tipcarreg**) é feita a discretização do domínio a estudar no problema, procedendo-se à definição dos nós (**nos**), da tabela de conectividades (**connect**), dos graus de liberdade (**gl**) e do número de elementos (**nel**). O sistema global reduzido (**debc**) é definido consoante o tipo de carregamento, i.e., pela remoção dos graus de liberdade prescritos na definição do problema. Em cada um dos casos, os graus de liberdade não-prescritos são definidos na variável **df**. Dependendo da natureza do problema, estas variáveis têm de ser definidas no início de cada problema. A variável **glcd** define o controlo dos graus de liberdade em deformação imposta, enquanto a variável **glcf** define o controlo dos graus de liberdade em força imposta. A porção do algoritmo relativa às linhas 34-50 são representadas na seguinte lista:

```

#####
nos = 100*[0, 0; 1, 0; 2, 0];% coordenadas dos nós
connect=[1, 2; 2, 3];% conectividades
gl=2*length(nos);% número de GL total %dois por nó
nel = length(connect);% número de elementos
lmm = [1, 2, 3, 4; 3, 4, 5, 6];% GL dos elementos
if tipcarreg == 0
    debc = [1, 2, 4, 5, 6]; % GL com deslocamentos prescritos
    ebcVals=[0, 0, 0, 1, 0];% zeros(length(debc),1);% deslocamentos prescritos
    df = [3];% GL com forças impostas
    glcd = 3;% GL de controlo da deformacao
else
    debc = [1, 2, 4, 6]; % GL com deslocamentos prescritos
    ebcVals=[0, 0, 0, 0];% deslocamentos prescritos

```

```
df = [3,5];% GL com forças impostas
glcf = 5;% GL de controlo em força
end
```

As variáveis `glsr` e `elsr` definem a saída dos resultados. É aqui que se define, através da variável `elsr`, a saída dos resultados no elemento em estudo. Para casos em que se tem mais do que um elemento, é importante visualizar o que ocorre num elemento em estudo. Por vezes é também interessante comparar a evolução de cada elemento para o estudo do modelo de encruamento elastoplástico.

Em seguida, são definidos todos os parâmetros mecânicos, nomeadamente a área da secção transversal ( $A$ ), o módulo de elasticidade ( $E$ ) e a tensão de cedência ( $s_Y$ ). O módulo plástico ( $H$ ) ou o módulo tangente ( $E_t$ ) são calculados através da sua relação com  $E$ . É então utilizado o método de Newton-Raphson para a determinação do valor de deformação plástica em cada incremento de carga, aproximando-se o resultado o mais possível do seu valor exato. Para isso, é necessário calcular o valor do resíduo e proceder a várias iterações até este valor seja suficientemente reduzido. Nesse contexto, procede-se à iniciação das variáveis que vão intervir nesse processo iterativo, como o valor de tolerância mínima (`tol`) e número máximo de iterações (`nmax`), no sentido de poder controlar o tempo de cálculo computacional e a exatidão do resultado.

Nesta fase são iniciadas todas as variáveis que serão necessárias para o cálculo e atualização das tensões e deformações ao longo do método iterativo. Destacam-se as principais variáveis, como a tensão (`sigma`), a nova tensão (`novsigma`), a tensão tentativa (`sigmatent`), a função de cedência (`sigmaced`), a deformação (`epsil`), a nova deformação (`novoepsil`) e a variação da deformação (`depsil`). Muito importante é também a variável que define o estado da estrutura (`estado` e `novestado`), a qual permite saber-se se se está perante um regime elástico ou plástico. A metodologia de cálculo será explicada mais a frente. Nesta fase, as linhas 51-71 correspondem à iniciação destas variáveis.

```
glsr = glcf;% GL de saída de resultados
elsr = 1;% Elem. de saída de resultados
A = [1,1];% área da secção transversal [mm^2]
E = [5000, 5000];% módulo de elasticidade [MPa]
sY = [6, 6];% tensão de cedência [MPa]
H=E/4;% Relacao mod plast[MPa]
Et(1:nel) = E(1:nel)*(1 - E(1:nel)/(E(1:nel) + H(1:nel)));% módulo tangente para
cada elemento
% Controlo de convergência
tol = 1e-7;% tolerância de convergência
nmax = 10;% número máximo de iterações
% Iniciação de valores
sigma = zeros(nel,1); novsigma = zeros(nel,1); dsigma = zeros(nel,1);
sigmatent = zeros(nel,1); sigmaced = zeros(nel,1);
epsil = zeros(nel,1); novoepsil = zeros(nel,1); depsil = zeros(nel,1);
defpac = zeros(nel,1); novodefpac = zeros(nel,1);
estado = zeros(nel,1); novestado = zeros(nel,1);
alfa = zeros(nel,1); novoalfa = zeros(nel,1); tolerced = zeros(nel,1);
csitent = zeros(nel,1); dlamb = zeros(nel,1); Cep = zeros(nel,1);
u = zeros(gl,1); du = zeros(gl,1); Ri=zeros(gl,1); Rf = zeros(nel,1);
x1 = zeros(nel,1); y1 = zeros(nel,1); x2 = zeros(nel,1); y2 = zeros(nel,1);
L = zeros(nel,1); ls = zeros(nel,1); ms = zeros(nel,1);
```

A partir da linha 71 (e até ao fim) o algoritmo entra num ciclo de carregamentos sucessivos que exprimem o valor de incremento de carga colocado no vetor `fatorcarga`.

É nas linhas 72-83 que se define o valor da carga a aplicar aos elementos em causa. `lambda` corresponde ao nosso fator de carga em cada incremento. Nesta fase são iniciadas variáveis, como o fator de convergência (`conv`), e procede-se à atualização de outras, como o contador de iterações (`iter = 1`), o vetor deslocamento (`u`), etc. As variáveis são atualizadas para se proceder a um novo incremento.

```
% #####
for step=1:length(factorcarga)
    lambda = factorcarga(step); %incremento de carga
    conv = 1; iter = 1; u = u + du;
    du = zeros(gl,1); % vetor deslocamento
    for i=1:nel %igualar a antiga com a nova para cada elemento
        sigma(i)=novsigma(i);
        epsil(i)=novoepsil(i);
        estado(i)=novestado(i);
        defpac(i)=novodefpac(i);
        alfa(i)=novoalfa(i);
    end
```

Nas linhas 84-90 definem-se os limites das iterações. Para um dado incremento de carga/deformação aplicado na estrutura, procura-se a solução mais exata através do método incremental de Newton-Raphson. Enquanto o fator de convergência (`conv`) for menor do que o valor de tolerância, o algoritmo estará sempre a incrementar, até que esta condição não se verifique. Logicamente, no sentido de evitar um esforço computacional excessivo, é também limitado a 10 o número de iterações. As variáveis `glcf` e `glcd` servem para determinar qual o nó que é controlado pela força ou pela deformação.

```
while conv > tol && iter < nmax
    KT = zeros(gl); R = zeros(gl,1);
    if tipcarreg == 0
        ebcVals(glcd)= lambda*uimp;
    else
        R(glcf) = lambda*Pimp;
    end
```

Nas iterações do método de Newton-Raphson determina-se a matriz rigidez tangente (KT) e o vetor de forças externas aplicadas (R) para cada elemento. É aqui que é definido o módulo tangente elastoplástico (`Cep`), o qual corresponde ao módulo de Young  $E$  no regime elástico e ao módulo tangente  $E_t$  no regime plástico. As linhas 91-110 correspondem a estes cálculos, representadas na lista seguinte:

```
for i=1:nel
    lm = lmm(i,:); %cada elemento
    con=conect(i,:); %cada elemento
    x1(i)=nos(conect(i,1),1); y1(i)=nos(conect(i,1),2); %coord
    x2(i)=nos(conect(i,2),1); y2(i)=nos(conect(i,2),2); %dos nos
    L(i)=sqrt((x2(i)-x1(i))^2+(y2(i)-y1(i))^2); %centro geo
    ls(i)=(x2(i)-x1(i))/L(i); ms(i)=(y2(i)-y1(i))/L(i); %
    if novestado(i) == 1
        Cep(i) = Et(i);
    else
        Cep(i) = E(i);
    end
    k = Cep(i)*A(i)/L(i)*[ls(i)^2, ls(i)*ms(i), -ls(i)^2, -ls(i)*ms(i);
    ls(i)*ms(i), ms(i)^2, -ls(i)*ms(i), -ms(i)^2; % KT sem nós prescritos
    -ls(i)^2, -ls(i)*ms(i), ls(i)^2, ls(i)*ms(i);
```

```

-ls(i)*ms(i),-ms(i)^2,ls(i)*ms(i),ms(i)^2];
r = zeros(4,1);
KT(lm, lm) = KT(lm, lm) + k; % soma as matriz rigidez dos 2 elem
R(lm) = R(lm) + r; % soma forças externas dos 2 elem
end

```

Em seguida são calculados os deslocamentos de acordo com a equação matricial associada ao sistema reduzido

$$\mathbf{F}_f = \mathbf{K}_f \Delta \mathbf{u}_f \Rightarrow \Delta \mathbf{u}_f = \mathbf{K}_f^{-1} \mathbf{F}_f, \quad (3.1)$$

sendo as reações determinadas por

$$\mathbf{React} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{R}_i - \mathbf{R}. \quad (3.2)$$

O sistema reduzido é definido com base nas variáveis **debc** e **ebcVals**, em que se define para cada nó quais os graus de liberdade prescritos, e na variável **df**, em que se define quais os grau de liberdade livres. Em seguida são calculadas as reações e deslocamentos segundo as equações 3.1 e 3.2 . As linhas 111-124 ilustram esta parte do algoritmo.

```

gl = length(R);
df = setdiff(1:gl, debc); %qual é o gl que nao esta prescrito
Kf = KT(df, df); %nova matriz rigidez com os gl livres
Rf(1:length(df)) = -Ri(df(1:length(df))) + R(df(1:length(df)))...
    - KT(df(1:length(df)), debc(:))*ebcVals(:);

dfVals = Kf\Rf;
duiter = zeros(gl,1);
duiter(debc(1:length(debc))) = ebcVals(1:length(debc));
duiter(df(1: length(df))) = dfVals(1: length(df));
reactions=zeros(length(debc),1);
reactions(1:length(debc)) = KT(debc(1:length(debc)),:)*duiter(:)...
    + Ri(debc(1:length(debc))) - R(debc(1:length(debc)));
du = du + duiter;
Ri = zeros(gl,1);

```

Nesta fase, procede-se ao cálculo do incremento de deformação

$$\Delta \epsilon = \frac{1}{L} [-1, 1] \Delta u, \quad (3.3)$$

sendo então em seguida atualizada a deformação (**novoepsil**)

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + \Delta \epsilon. \quad (3.4)$$

Entra-se então no algoritmo para a formulação discreta da Elastoplasticidade Clássica com encruamento misto linear 2.1. Nesse contexto, determina-se a tensão tentativa

$$\sigma_{n+1}^{\text{tent}} = \sigma_n + E \Delta \epsilon, \quad (3.5)$$

a tensão deslocada tentativa

$$\xi_{n+1}^{\text{tent}} = \sigma_{n+1}^{\text{tent}} - \alpha_n \quad (3.6)$$

e, por fim, a função de cedência tentativa

$$f_{n+1}^{\text{tent}} = |\xi_{n+1}^{\text{tent}}| - (\sigma_Y + (1 - \beta) H \lambda_n). \quad (3.7)$$

As linhas 125-135 do algoritmo representam o desenvolvimento das equações anteriores no sentido de definir se se está no regime elástico ou no plástico.

```

for i=1:nel
    lm = lmm(i,:);
    con=conect(i,:);
    T = [ls(i), ms(i), 0, 0; 0, 0, ls(i), ms(i)];
    depsil(i) = (1/L(i))* [-1, 1]* (T*du(lm));%variacao deformacao
    novoepsil(i) = epsil(i) + depsil(i); %novo
    dsigma(i) = E(i)*depsil(i);
    tolerced(i) = sY(i)*1.0e-6; %tolerancia para cedencia
    sigmatent(i) = sigma(i) + E(i)*depsil(i); %tensao tent
    csitent(i) = sigmatent(i) - alfa(i); %tensao deslocada tent
    sigmaced(i) = abs(csitent(i)) - (sY(i)+(1-beta(i))*H(i)*defpac(i)); %
        funcao ceden tent

```

A verificação do estado e atualização das variáveis é feita logo em seguida, para assim se determinar a deformação plástica acumulada e tensão para um dado incremento de deformação. Assim, tem-se

- Se a  $f_{n+1}^{\text{tent}} < \text{tolerced}$ , i.e., se  $\text{sigmaced} < \text{tolerced}$ , então o material permanece no regime elástico e é feita a atualização das variáveis:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{tent}} \Rightarrow \text{novsigma} = \text{sigmatent} \quad (3.8)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \Rightarrow \text{novalpha} = \text{alfa} \quad (3.9)$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n \Rightarrow \text{novodefpac} = \text{defpac} \quad (3.10)$$

- Por outro lado, se  $f_{n+1}^{\text{tent}} \geq \text{tolerced}$ , i.e., se  $\text{sigmaced} \geq \text{tolerced}$ , o material está no domínio plástico, pelo que se tem de calcular o incremento do multiplicador plástico  $\Delta\lambda$  e obter  $\text{novsigma}$ ,  $\text{novalpha}$  e  $\text{novodefpac}$  através das seguintes equações:

$$\Delta\lambda = \frac{f_{n+1}^{\text{tent}}}{E + H} \quad (3.11)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{tent}} - \text{sign}(\xi_{n+1}^{\text{tent}}) E \Delta\lambda \quad (3.12)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \text{sign}(\xi_{n+1}^{\text{tent}}) \beta H \Delta\lambda \quad (3.13)$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_{n+1} + \Delta\lambda \quad (3.14)$$

As linhas 136-155 correspondem a estes procedimentos.

```

switch (estado(i))
    case {0}
        if sigmaced(i) > tolerced
            novestado(i) = 1;
        end
    case {1}
        if sigma(i)*dsigma(i) < 0
            novestado(i) = 0;
        end
end
if sigmaced(i) < tolerced % teste cedencia
    novsigma(i) = sigmatent(i);
    novalpha(i) = alfa(i);
    novodefpac(i) = defpac(i); %esatdo tentativa final
else
    dlamb(i) = sigmaced(i)/(E(i)+H(i)); %incremento plastico

```



```

        novsigma(i) = sigmatent(i) - sign(csitent(i))*E(i)*dlamb(i); %
            atualizar tensao
        novoalfa(i) = alfa(i) + sign(csitent(i))*beta(i)*H(i)*dlamb(i); %
            atualizar alpha
        novodefpac(i) = defpac(i) + dlamb(i); %atualizar a def plastica
    end

```

Resta agora calcular o fator de convergência (conv) de modo a obter-se um resultado que seja o mais exato possível. Através do método iterativo Newton-Raphson é sabido que os resultados são aproximados. Para melhor aproximar a solução, o algoritmo faz várias iterações até o fator de convergência se reduzir ao mínimo possível. As linhas 156-163 correspondem à verificação de convergência, terminando as iterações caso a o fator de convergência (conv) seja menor do que a tolerância (tol).

```

    p = A(i)*novsigma(i);
    ri = T' * [-p; p];
    Ri(lm) = Ri(lm) + ri;
end
Rf = R(df); Ff = -Ri(df) + Rf;
conv = (Ff'*Ff)/(1 + Rf'*Rf);
iter = iter + 1;
end

```

Após a atualização das variáveis é possível agora desenhar curvas tensão-deformação e força-deslocamento para o problema em análise. As linhas 164-202 finais representam o final do algoritmo relativo à visualização das curvas.

```

% Saída de Resultados
if prttype == 0
    if beta(1) == 1
        grafi=plot(novoepsil(elsr),novsigma(elsr),'r');
        title('Curva tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend(['Elemento: ' num2str(elsr) ' - Encruamento Cinemático']);
    elseif beta(1) == 0
        grafi=plot(novoepsil(elsr),novsigma(elsr),'b');
        title('Curva tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend(['Elemento: ' num2str(elsr) ' - Encruamento Isotrópico']);
    else
        grafi=plot(novoepsil(elsr),novsigma(elsr),'g');
        title('Curva tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend(['Elemento: ' num2str(elsr) ' - Encruamento Independente']);
    end

elseif prttype == 1
    if beta(1) == 1
        grafi=plot(u(glsr)+du(glsr),Ri(glsr),'r');
        title('Curva Força-Deslocamento - Força Imposta ');
        xlabel('Deslocamento'); ylabel('Força');
        legend('Cinemático');
    elseif beta(1) == 0
        grafi=plot(u(glsr)+du(glsr),Ri(glsr),'b');
        title('Curva Força-Deslocamento - Força Imposta ');
        xlabel('Deslocamento'); ylabel('Força');
        legend('Isotrópico');
    end
end

```

```

else
    grafi=plot(u(glsr)+du(glsr),Ri(glsr),'.g');
    title('Curva Força-Deslocamento - Força Imposta ');
    xlabel('Deslocamento'); ylabel('Força');
    legend('Independente');
end
end
hold on; grid on;
end % Fim

```

O fluxograma que descreve o funcionamento do algoritmo encontra-se num anexo. Este escreve na íntegra de modo esquemático todo o processo de cálculo desenvolvido no algoritmo.

## 3.2 Problemas de Elastoplasticidade Estrutural com Reversão de Carga

Em seguida são apresentados quatro problemas de elastoplasticidade estrutural com barras sujeitas a reversão de carga. Procede-se à sua exposição e resolução de modo analítico, servindo os seus resultados para validar posteriormente os obtidos numericamente com base no programa Plast1D. Os casos apresentados seguem a metodologia de cálculo apresentada em [12, 15].

Nos vários problemas procede-se à análise do efeito do tipo de lei de encruamento no comportamento de estruturas articuladas sujeitas a estados de tração-compressão (i.e., reversão de carga) provocado pela imposição seja de carga seja de deslocamento. No primeiro problema considera-se uma barra sujeita a reversão de carga pela imposição seja de carga seja de deslocamento. No segundo problema considera-se uma estrutura biapoiada constituída por duas barras de diferentes dimensões sujeita à imposição de uma carga com reversão na sua interface. No terceiro problema considera-se uma estrutura constituída por três barras em paralelo sujeita à imposição de uma carga com reversão. Por fim, no Problema 4, considera-se uma treliça constituída por três barras sujeita à imposição de uma carga com reversão.

### 3.2.1 Problema 1 – Barra Simplesmente Apoiada

Vai analisar-se o comportamento elastoplástico de uma barra simplesmente apoiada, representada na figura 3.1, sujeita a reversão de carga pela imposição seja de força seja de deslocamento.

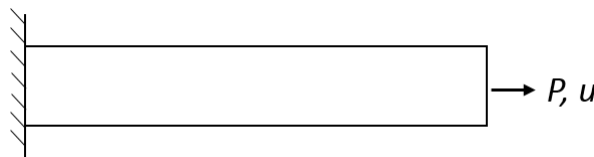


Figura 3.1: Barra simplesmente apoiada com força ou deslocamento imposto.

Considera-se a seguinte relação tensão-deformação:

$$E_t = \begin{cases} \sigma = E\epsilon & \Leftarrow 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0 \\ \sigma = \sigma_0 + H\epsilon^p & \Leftarrow \epsilon_0 < \epsilon \end{cases},$$

em que

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$$

e o módulo plástico corresponde a

$$H = \frac{E}{9}.$$

Numa primeira fase, considera-se que a barra é sujeita ao seguinte carregamento uniaxial de força imposta:

$$\sigma = 0 \rightarrow \sigma_1 \rightarrow 0 \rightarrow -\sigma_1 \rightarrow 0,$$

em que

$$\sigma_1 = (1 + \gamma)\sigma_0,$$

com  $0 \leq \gamma \leq 1$ , em que  $\gamma$  é a fração de carga. Neste contexto, pretende-se determinar a curva tensão-deformação da barra para as leis de encruamento isotrópico, cinemático e independente, cuja representação esquemática de forma adimensionalizada se encontra representada na figura 3.2. Deste modo, pretende-se determinar a tensão e a deformação para os dez pontos O, A, B, D1, D2, D3, E2, E3 e F2.

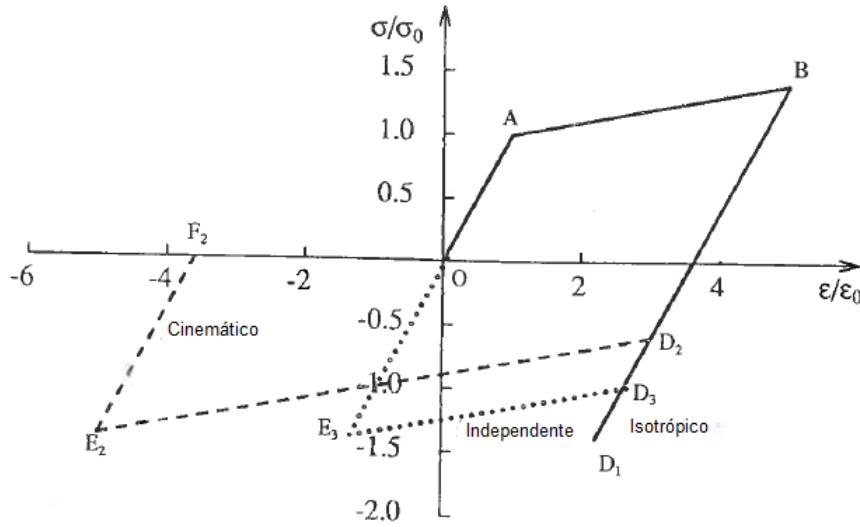


Figura 3.2: Representação da curva tensão-deformação adimensionalizada para o Problema 1, com  $\gamma = 0.4$  e força imposta. Adapt. [15].

Verifica-se que o ponto A corresponde à cedência do material para todos modelos. No caso da lei de encruamento isotrópico, o ponto D1 corresponde ao de cedência em reversão de carga. De acordo com o referido nas secções anteriores, a cedência em compressão para o modelo de encruamento isotrópico ocorre para  $-\sigma_B$ . Por outro lado, no caso da lei de encruamento cinemático, a cedência em reversão de carga é representada pelo ponto D2, ocorrendo para  $\sigma_B - 2\sigma_{Y0}$ . No caso da lei de encruamento independente, o ponto D3 corresponde à cedência em reversão de carga, que ocorre para  $-\sigma_{Y0}$ . Os pontos E2

e E3 correspondem a  $-\sigma_B$ . Por fim, o ponto F2 corresponde a uma tensão novamente nula. Para se determinar a deformação para cada um dos referidos pontos, segue-se a metodologia de cálculo seguinte:

1. Da relação 2.39 resulta que  $E_t = \frac{E}{10}$ ;
2. No ponto A dá-se o início de cedência, pelo que

$$\sigma_A = \sigma_0 \quad \text{e} \quad \epsilon_A = \epsilon_0,$$

pelo que o ponto A corresponde a  $[\epsilon_0, \sigma_0]$ ;

3. Para o ponto B tem-se que

$$\sigma_B = \sigma_1 = (1 + \gamma)\sigma_0$$

e

$$\epsilon_B = \epsilon_0 + \Delta\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{E_t} = (1 + 10\gamma)\epsilon_0,$$

pelo que o ponto B corresponde a  $[(1 + 10\gamma)\epsilon_0, (1 + \gamma)\sigma_0]$ ;

4. A determinação da deformação para os pontos D1, D2 e D3 segue o modelo de encruamento isotrópico, cinemático e independente, respetivamente. De acordo com o que foi referido, tem-se que  $\sigma_{D1} = \sigma_B - 2\sigma_0$ ,  $\sigma_{D2} = \sigma_B - 2\sigma_0$  e  $\sigma_{D3} = -\sigma_0$ . O cálculo da deformação obtém-se de acordo com a equação  $\epsilon = \epsilon + \Delta\epsilon$ . Assim, para o ponto D1 a deformação corresponde a

$$\epsilon_{D1} = \epsilon_B + \frac{\sigma_{D1} - \sigma_B}{E} = (8\gamma - 1)\epsilon_0,$$

para o ponto D2 é

$$\epsilon_{D2} = \epsilon_B + \frac{\sigma_{D2} - \sigma_B}{E} = (10\gamma - 1)\epsilon_0$$

e para o ponto D3 corresponde a

$$\epsilon_{D3} = \epsilon_B + \frac{\sigma_{D3} - \sigma_B}{E} = (9\gamma - 1)\epsilon_0.$$

Assim, as coordenadas do ponto D1 são  $[(8\gamma - 1)\epsilon_0, -(1 + \gamma)\sigma_0]$ , do ponto D2 são  $[(10\gamma - 1)\epsilon_0, (\gamma - 1)\sigma_0]$  e do ponto D3 são  $[(9\gamma - 1)\epsilon_0, -\sigma_0]$ ;

5. A obtenção da deformação para os pontos E2 e E3 segue o modelo de encruamento cinemático e independente, respetivamente. Atendendo a que  $\sigma_{E2} = \sigma_{E3} = -\sigma_B$ , tem-se que

$$\epsilon_{E2} = \epsilon_B + \frac{\sigma_{E2} - \sigma_{D2}}{E_t} = -(10\gamma + 1)\epsilon_0$$

e

$$\epsilon_{E3} = \epsilon_{D2} + \frac{\sigma_{E3} - \sigma_{D3}}{E_t} = -(1 + \gamma)\epsilon_0,$$

pelo que as coordenadas do ponto E2 são  $[-(10\gamma + 1)\epsilon_0, -(1 + \gamma)\sigma_0]$  e do ponto E3 são  $[-(1 + \gamma)\epsilon_0, -(1 + \gamma)\sigma_0]$ ;

6. Por fim, sabendo que  $\sigma_{F3} = 0$ , tem-se que

$$\epsilon_{F2} = \epsilon_{E2} + \frac{\sigma_{F2} - \sigma_{E2}}{E} = -(9\gamma)\epsilon_0,$$

Pelo que as coordenadas do ponto F2 são  $[-(9\gamma)\epsilon_0, 0]$ .

Numa segunda fase, considera-se que a barra é sujeita ao seguinte carregamento uniaxial de deslocamento imposto:

$$\epsilon = 0 \rightarrow \epsilon_1 \rightarrow 0 \rightarrow -\epsilon_1 \rightarrow 0,$$

Neste contexto, pretende-se determinar a curva tensão-deformação da barra para as leis de encruamento isotrópico, cinemático e independente, cuja representação esquemática de forma adimensionalizada se encontra representada na figura 3.3. Deste modo, pretende-se determinar a tensão e a deformação para os dezoito pontos O, A, B, D1, D2, D3, E1, E2, E3, F1, F2, F3, G1, G2, G3, H1, H2 e H3.

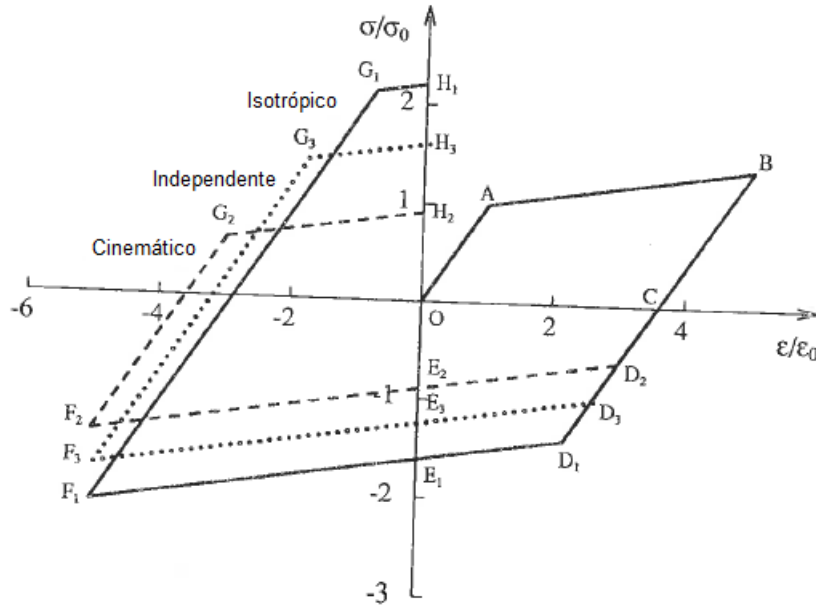


Figura 3.3: Representação da curva tensão-deformação adimensionalizada para o Problema 1, com  $\gamma = 0.4$  e deslocamento imposto. Adapt. [15].

De acordo com a análise anterior, as coordenadas dos pontos A, B, D1, D2 e D3 correspondem, respetivamente, a  $[\epsilon_0, \sigma_0]$ ,  $[(1+10\gamma)\epsilon_0, (1+\gamma)\sigma_0]$ ,  $[(8\gamma-1)\epsilon_0, -(1+\gamma)\sigma_0]$ ,  $[(10\gamma-1)\epsilon_0, (\gamma-1)\sigma_0]$  e  $[(9\gamma-1)\epsilon_0, -\sigma_0]$ . Assim, tem-se a seguinte metodologia:

1. Na definição das coordenadas do ponto E1 sabe-se que  $\epsilon_{D1} = 0$  e que o material permanece em regime plástico e portanto, através da consideração do módulo tangente tem-se que

$$\Delta\sigma = E_t \Delta\epsilon = E_t (\epsilon_{E1} - \epsilon_{D1}) = -\frac{1}{10}(8\gamma-1)\sigma_0,$$

pelo que

$$\sigma_{E1} = \sigma_{D1} + \Delta\sigma = -\left(\frac{9}{10} + \frac{18}{10}\gamma\right)\sigma_0,$$

correspondendo as coordenadas do ponto E1 a  $\left[0, -\left(\frac{9}{10} + \frac{18}{10}\gamma\right)\sigma_0\right]$ . Relativamente ao ponto E2, associado ao modelo de encrumento cinemático, sabe-se que  $\epsilon_{E2} = 0$ , pelo que

$$\Delta\sigma = E_t\Delta\epsilon = E_t(\epsilon_{E2} - \epsilon_{D2}) = (-\gamma + \frac{1}{10})\sigma_0$$

e

$$\sigma_{E2} = \sigma_{D2} + \Delta\sigma = -\frac{9}{10}\sigma_0,$$

sendo as coordenadas do ponto E2  $\left[0, -\frac{9}{10}\sigma_0\right]$ . De modo análogo, relativamente ao ponto E3, associado ao modelo de encruamento independente, sabe-se que  $\epsilon_{E3} = 0$ , pelo que

$$\sigma_{E3} = \sigma_{D3} + \Delta\sigma = \sigma_{D3} + E_t(\epsilon_{E3} - \epsilon_{D3}) = -\left(\frac{9}{10}\gamma + \frac{9}{10}\right)\sigma_0,$$

sendo as coordenadas do ponto E3  $\left[0, -\left(\frac{9}{10}\gamma + \frac{9}{10}\right)\sigma_0\right]$ ;

2. O encruamento continua até que nos pontos F1, F2 e F3 se atinge o valor mínimo da deformação imposta, sendo  $\epsilon_{F1} = \epsilon_{F2} = \epsilon_{F3} = -\epsilon_B = -\epsilon_1 = -(1 + 10\gamma)\epsilon_0$ . Assim, tem-se que

$$\Delta\sigma = E_t\Delta\epsilon = E_t(\epsilon_{F1} - \epsilon_{E1}) = -\frac{1}{10}(1 + 10\gamma)\sigma_0$$

e

$$\sigma_{F1} = \sigma_{E1} + \Delta\sigma = -\left(1 + \frac{28}{10}\gamma\right)\sigma_0,$$

sendo as coordenadas do ponto F1  $\left[-(1 + 10\gamma)\epsilon_0, -(1 + \frac{28}{10}\gamma)\sigma_0\right]$ . Para o ponto F2, associado ao encruamento cinemático, tem-se

$$\Delta\sigma = E_t\Delta\epsilon = E_t(\epsilon_{F2} - \epsilon_{E2}) = -\left(\frac{1}{10} + \gamma\right)\sigma_0$$

e

$$\sigma_{F2} = \sigma_{E2} + \Delta\sigma = -\sigma_0(\gamma + 1),$$

pelo que as coordenadas do ponto F2 são  $\left[-(\frac{1}{10} + \gamma)\epsilon_0, -(\gamma + 1)\sigma_0\right]$ . De modo análogo, para o ponto F3, associado ao encruamento independente, tem-se

$$\sigma_{F3} = \sigma_{E3} + \Delta\sigma = \sigma_{E3} + E_t(\epsilon_{F3} - \epsilon_{E3}) = -\left(\frac{19}{10}\gamma + 1\right)\sigma_0,$$

pelo que as coordenadas do ponto F3 são  $\left[-(1 + 10\gamma)\epsilon_0, -(\frac{19}{10}\gamma + 1)\sigma_0\right]$ ;

3. Na reversão do deslocamento imposto, o material encontra-se no regime elástico até aos pontos G1, G2 e G3. Para o modelo de encruamento isotrópico tem-se que  $\sigma_{G1} = \sigma_{F1} - 2\sigma_{F1} = -\sigma_{F1}$ , pelo que

$$\epsilon_{G1} = \epsilon_{F1} + \Delta\epsilon = \epsilon_{F1} + \frac{\sigma_{G1} - \sigma_{F1}}{E} = \left(1 - \frac{44}{10}\gamma\right)\epsilon_0,$$

sendo as coordenadas do ponto G1  $[(1 - \frac{44}{10}\gamma)\epsilon_0, -(1 + \frac{28}{10}\gamma)\sigma_0]$ . Para o ponto G2, associado ao modelo de encruamento cinemático, tem-se que  $\sigma_{G2} = \sigma_{F2} + 2\sigma_0 = \sigma_0(-\gamma + 1)$ , pelo que

$$\epsilon_{G2} = \epsilon_{F2} + \Delta\epsilon = \epsilon_{F2} + \frac{\sigma_{G2} - \sigma_{F2}}{E} = (1 - 10\gamma)\epsilon_0,$$

correspondendo as coordenadas do ponto G2 a  $[(1 - 10\gamma)\epsilon_0, (-\gamma + 1)\sigma_0]$ . Por fim, para o ponto G3, associado ao modelo de encruamento independente, tem-se que  $\sigma_{G3} = \sigma_B = (1 + \gamma)\sigma_0$ , pelo que

$$\epsilon_{G3} = \epsilon_{F3} + \Delta\epsilon = \epsilon_{F3} + \frac{\sigma_{G3} - \sigma_{F3}}{E} = \left(1 - \frac{71}{10}\gamma\right)\epsilon_0$$

e as coordenadas do ponto G3 são  $[(1 - \frac{71}{10}\gamma)\epsilon_0, (1 + \gamma)\sigma_0]$ ;

4. Para os pontos H1, H2 e H3 tem-se que  $\epsilon_{H1} = \epsilon_{H2} = \epsilon_{H3} = 0$ . Assim, para o ponto H1 tem-se

$$\sigma_{H1} = \sigma_{G1} + \Delta\sigma = \sigma_{G1} + E_t(\epsilon_{H1} - \epsilon_{G1}) = \sigma_0 \left( \frac{9}{10} + \frac{324}{100}\gamma \right),$$

sendo as coordenadas do ponto H1  $[0, (\frac{9}{10} + \frac{324}{100}\gamma)\sigma_0]$ . Para o ponto H2, associado ao modelo de encruamento cinemático, tem-se

$$\sigma_{H2} = \sigma_{G2} + \Delta\sigma = \sigma_{G2} + E_t(\epsilon_{H2} - \epsilon_{G2}) = \frac{9}{10}\sigma_0,$$

pelo que as coordenadas do ponto H2 são  $[0, (\frac{9}{10}\sigma_0)]$ . Por fim, para o ponto H3, associado ao modelo de encruamento independente, tem-se

$$\sigma_{H3} = \sigma_{G3} + \Delta\sigma = \sigma_{G3} + E_t(\epsilon_{G3} - \epsilon_{G3}) = \left( \frac{9}{10} + \frac{171}{100}\gamma \right)\sigma_0,$$

correspondendo as coordenadas do ponto H3 a  $[0, (\frac{9}{10} + \frac{171}{100}\gamma)\sigma_0]$ .

Após se ter resolvido o problema analiticamente, procedeu-se à simulação numérica com o programa Plast1D, considerando uma tensão de cedência  $\sigma_y = 6$  MPa, um módulo de elasticidade  $E = 5000$  MPa, uma área da secção transversal  $A = 1$  mm<sup>2</sup>, um módulo plástico  $H = \frac{E}{5}$  MPa, uma força imposta  $P = 15$  N e um deslocamento imposto  $u = 1$  mm. As figuras 3.4 e 3.5 representam as curvas tensão-deformação para os três modelos de encruamento para o Problema 1 com força imposta e deslocamento imposto, respetivamente. É ainda notória a diferença entre cada um dos modelos, nomeadamente na tensão de cedência em reversão de carga no caso de deslocamento imposto. Na figura 3.4 pode verificar-se que a cedência após reversão de carga ocorre primeiro para o caso do encruamento cinemático do que no do isotrópico, ocorrendo para o caso do modelo de encruamento independente entre os níveis de tensão correspondentes aos restantes modelos de encruamento, pois este envolve 50% de cada um dos restantes encruamentos. Na figura 3.5 constata-se que o modelo de encruamento isotrópico é o que leva ao maior valor de encruamento para deslocamento imposto.

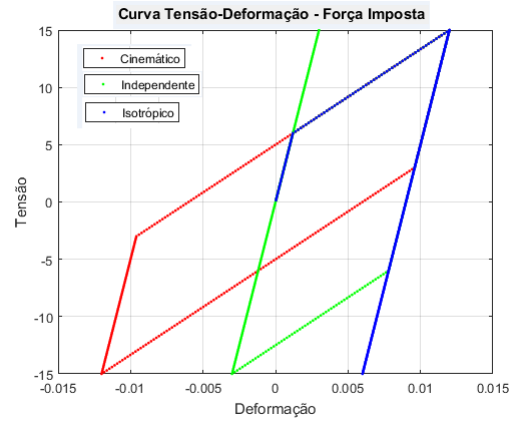


Figura 3.4: Curvas tensão-deformação para os modelos de encruamento isotrópico, cinemático e misto, com força imposta para o problema 1.

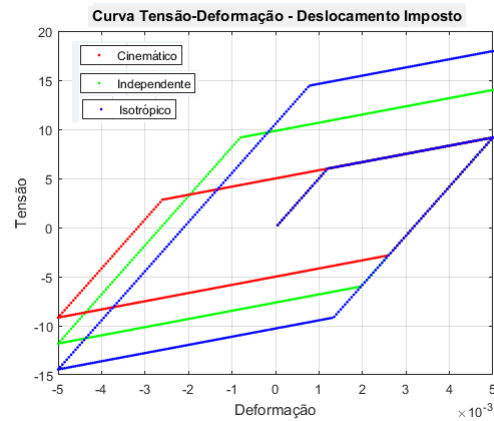


Figura 3.5: Curvas tensão-deformação para os modelos de encruamento isotrópico, cinemático e misto, com deslocamento imposto para o problema 1.



Por outro lado, a aplicação de sucessivos ciclos de carga-descarga pode ser interessante para o estudo de uma dada estrutura sujeita a deslocamento imposto. Assim, na figura 3.6 representa-se o comportamento para leis de encruamento cinemático, isotrópico e independente para a aplicação de 4 ciclos sucessivos de deslocamento imposto. É interessante ver a evolução da curva para cada modelo. Verifica-se um aumento da superfície de cedência para os modelos de encruamento isotrópico e independente. Pelo contrário, no modelo de encruamento cinemático a superfície de cedência mantém-se inalterada, definindo um ciclo estabilizado.

No sentido de ilustrar a evolução da curva tensão-deformação do modelo de encruamento misto para diferentes valores de  $\beta$  são apresentadas as curvas da figura 3.7 que representam a evolução para  $\beta = 0.2$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\beta = 0.7$  e  $\beta = 0.9$  sabendo que quando o  $\beta = 0.5$  o modelo de encruamento é denominado independente. Com o aumento do  $\beta$  a curva vai-se fechando e a tensão de cedência em reversão de carga vai diminuindo. Isto significa que a curva vai evoluindo de um modelo próximo do encruamento isotrópico ( $\beta = 0$ ) para um modelo próximo do encruamento cinemático ( $\beta = 1$ ).

### 3.2.2 Problema 2 – Estrutura de Barras Biapoiada

Neste problema considera-se uma estrutura biapoiada constituída por duas barras de diferentes dimensões sujeita à imposição de uma carga horizontal  $P$  com reversão na sua interface, tal como se ilustra na figura 3.8. Considera-se uma tensão de cedência  $\sigma_0$  e áreas de secção transversal  $A_1$  e  $A_2$  para os elementos A e B, respetivamente. A estrutura é sujeita ao seguinte carregamento de força horizontal imposta:

$$P = 0 \rightarrow 4A_1\sigma_0 \rightarrow 0 \rightarrow -4A_1\sigma_0 \rightarrow 0. \quad (3.15)$$

A tensão nas barras pode ser obtida através do equilíbrio das forças no ponto que está sob carga. Assim, tem-se

$$F_A = F_B + P = \frac{F_A}{A_1} = \frac{F_B A_2}{A_1} + \frac{P}{A_1} = \sigma_A - \alpha \sigma_B = \frac{P}{A_1},$$

em que  $\alpha = \frac{A_2}{A_1}$ . Visto a estrutura ser biapoiada (hiperestática), a variação total do seu tamanho terá de ser nula, pelo que

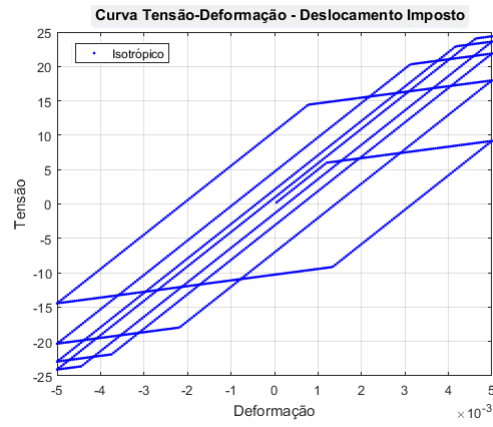
$$\Delta L_A + \Delta L_B = 0 \Rightarrow E\epsilon_A a + E\epsilon_B b = 0 \Rightarrow \sigma_A a + \sigma_B b = 0.$$

Assim, as tensões no elementos A e B correspondem, respetivamente, a

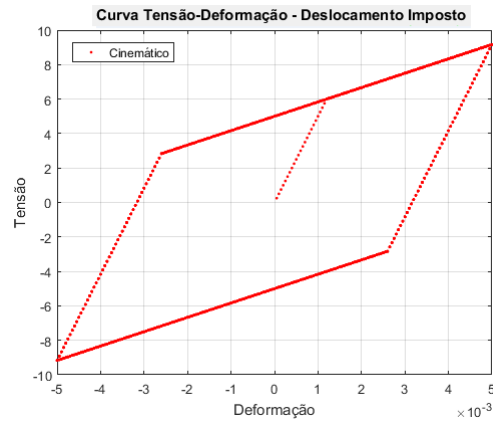
$$\sigma_A = \frac{Pb}{A_1(b + \alpha a)} \quad \text{e} \quad \sigma_B = -\frac{Pa}{A_1(b + \alpha a)}.$$

Neste contexto, assumindo o modelo de encruamento linear isotrópico, a razão de áreas das secções transversais  $\alpha = 2$ , o módulo tangencial  $E_t = \frac{E}{5}$  (permite calcular o módulo plástico  $H$  pela relação 2.39) e a razão de distâncias  $\frac{a}{b} = 2$ . Sendo  $a > b$ , então  $|\sigma_B| > |\sigma_A|$ , pelo que o elemento B cede primeiro do que o A. Para a região elástica até a carga  $P_1$ , que corresponde à carga em que o primeiro elemento cede, e assumindo as variações de tensão e deformação, as equações de equilíbrio e compatibilidade correspondem, respetivamente, a

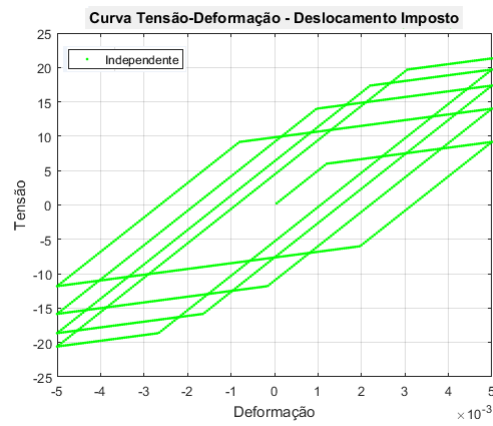
$$\Delta\sigma_A - 2\Delta\sigma_B = \frac{P}{A_1} \quad (3.16)$$



(a)



(b)



(c)

Figura 3.6: Curvas tensão-deformação para deslocamento imposto e lei de encruamento (a) isotrópico, (b) cinemático e (c) misto ( $\beta = 0.5$ ) com 4 ciclos de carga do problema 1.

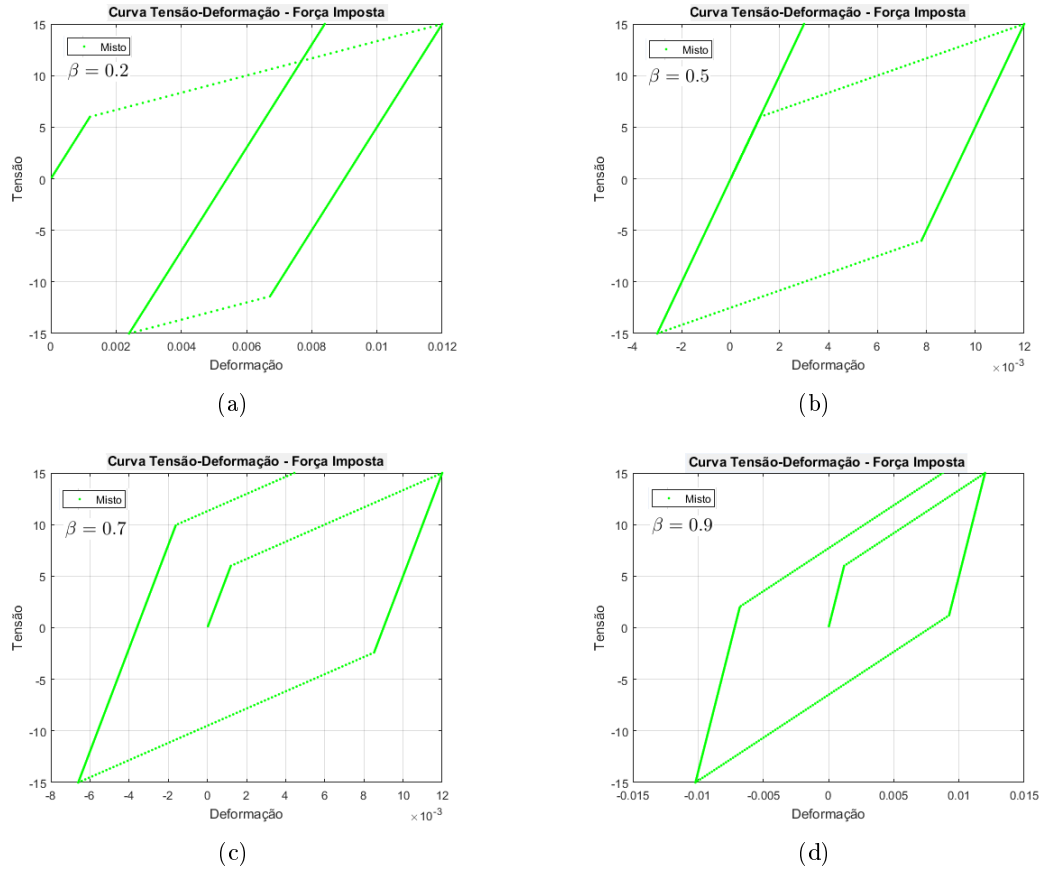


Figura 3.7: Curvas tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento misto com (a)  $\beta = 0.2$  (b)  $\beta = 0.5$  (c)  $\beta = 0.7$  e (d)  $\beta = 0.9$  para o problema 1.

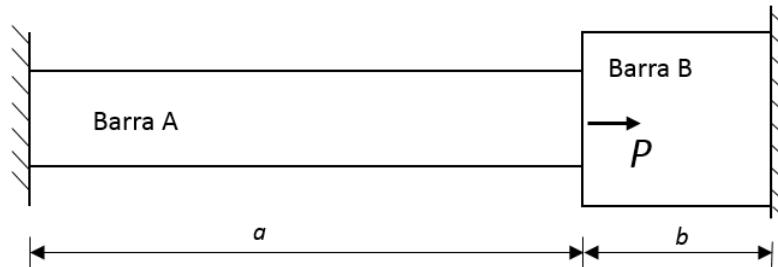


Figura 3.8: Estrutura biapoiaada constituída por duas barras, com força imposta na sua interface. Adapt. [15].

e

$$2b\Delta\epsilon_A + b\Delta\epsilon_B = 0 \iff \Delta\epsilon_A + \frac{1}{2}\Delta\epsilon_B = 0. \quad (3.17)$$

Sendo a deformação elástica, tem-se que

$$\Delta\epsilon_A = -\frac{1}{2}\Delta\epsilon_B \Rightarrow \Delta\sigma_A = -\frac{1}{2}\Delta\sigma_B, \quad (3.18)$$

pelo que a sua substituição na equação 3.16 resulta em

$$\Delta\sigma_B = -\frac{2}{5}\frac{P}{A_1} \quad (3.19)$$

e

$$\Delta\sigma_A = \frac{1}{5}\frac{P}{A_1}. \quad (3.20)$$

Sendo o elemento B o primeiro a ceder, tem-se

$$\Delta\sigma_B = -\frac{2}{5}\frac{P}{A_1} = -\frac{2}{5}\frac{P_1}{A_1} = \sigma_0 \Rightarrow \frac{P_1}{A_1} = \frac{5}{2}\sigma_0 \Rightarrow P_1 = \frac{5}{2}\sigma_0 A_1, \quad (3.21)$$

pelo que as tensões para os elementos sob a carga P1 são

$$\sigma_A = \frac{1}{2}\sigma_0 \quad \text{e} \quad \sigma_B = -\sigma_0.$$

Tendo sido o elemento B o primeiro a ceder, tem-se que

$$\Delta\sigma_B = E_t \Delta\epsilon_B, \quad (3.22)$$

pelo que a equação anterior, em conjunto com as equações 3.18 e 3.16, resulta, para o regime elastoplástico, em

$$\Delta\sigma_A = \frac{5}{9}\frac{\Delta P}{A_1} \quad \text{e} \quad \Delta\sigma_B = -\frac{2}{9}\frac{\Delta P}{A_1}. \quad (3.23)$$

Na determinação da carga  $P_1$ , o elemento B cedeu e o A manteve-se no regime elástico. Procura-se agora a cedência para o elemento A, para uma carga  $P_2 > P_1$ . Assim, para o comportamento elástico do elemento A obtém-se

$$\sigma_A = \frac{1}{2}\sigma_0 + \frac{5}{9}\frac{\Delta P}{A_1} \quad \text{e} \quad \sigma_B = -\sigma_0 - \frac{2}{9}\frac{\Delta P}{A_1}. \quad (3.24)$$

Atendendo a que o elemento A cede assim que  $\sigma_A = \sigma_0$ , tem-se, das relações anteriores, que

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\sigma_0 + \frac{5}{9}\frac{P_2 - P_1}{A_1}, \quad (3.25)$$

pelo que

$$P_2 = \frac{34}{10}\sigma_0 A_1, \quad (3.26)$$

resultando que

$$\sigma_A = \sigma_0 \quad \text{e} \quad \sigma_B = -\frac{6}{5}\sigma_0.$$

Encontrando-se a barra totalmente plastificada, resta agora determinar quando se atinge o valor de carga  $P_3$  associado à carga máxima imposta e os correspondentes valores de tensão para cada elemento. Assim, para  $P_3 = 4A_1\sigma_0$  resulta que  $\Delta P = \frac{6}{10}A_1\sigma_0$ , pelo que das relações 3.16 e 3.17 se obtém

$$\Delta\sigma_A = \frac{12}{100}\sigma_0 \quad \text{e} \quad \Delta\sigma_B = -\frac{12}{50}\sigma_0,$$

resultando

$$\sigma_A = \frac{28}{25}\sigma_0 \quad \text{e} \quad \sigma_B = -\frac{36}{25}\sigma_0.$$

Quando a carga é aliviada e se atinge  $P_4 = 0$ , a variação de carga corresponde a  $\Delta P = -4A_1\sigma_0$  e ocorre em regime elástico, pelo que

$$\Delta\sigma_A = -\frac{4}{5}\sigma_0 \quad \text{e} \quad \Delta\sigma_B = \frac{8}{5}\sigma_0,$$

$$\sigma_A = \frac{8}{25}\sigma_0 \quad \text{e} \quad \sigma_B = \frac{4}{25}\sigma_0.$$

Em reversão de carga o material mantém-se elástico até que seja atingido o primeiro ponto de cedência. Tal como aconteceu anteriormente, o primeiro elemento a ceder é o B, para uma carga  $P_5$  a determinar. Atendendo a que no modelo de encruamento isotrópico a cedência em reversão de carga ocorre para uma tensão simétrica da correspondente ao ponto máximo de carga, i.e.,  $\sigma_B = \frac{36}{25}\sigma_0$ , que é o simétrico da correspondente à carga  $P_3$ . Assim, tem-se que

$$\frac{36}{25}\sigma_0 = \frac{4}{25}\sigma_0 - \frac{2}{5}\frac{\Delta P}{A_1} \Rightarrow \Delta P = \frac{16}{5}\sigma_0 A_1, \Rightarrow \Delta P = P_5 - P_4 = P_5, \quad (3.27)$$

pelo que

$$\sigma_A = -\frac{8}{25}\sigma_0 \quad \text{e} \quad \sigma_B = \frac{36}{25}\sigma_0.$$

Considerando agora o modelo de encruamento cinemático, tem-se que a cedência em reversão de carga ocorre no elemento B para um decréscimo do dobro de  $\sigma_0$ , pelo que

$$\sigma_B = -\frac{36}{25}\sigma_0 - 2(-\sigma_0) = \frac{14}{25}\sigma_0. \quad (3.28)$$

Assim, tem-se

$$\frac{14}{25}\sigma_0 = \frac{4}{25}\sigma_0 - \frac{2}{5}\frac{\Delta P}{A_1} \Rightarrow \Delta P = -\sigma_0 A_1 \Rightarrow \Delta P = P_5 - P_4 = P_5, \quad (3.29)$$

pelo que

$$\sigma_A = \frac{3}{5}\sigma_0 \quad \text{e} \quad \sigma_B = \frac{14}{25}\sigma_0.$$

No caso do modelo de encruamento independente, a cedência no elemento B em reversão de carga vai ocorrer para  $\sigma_B = \sigma_0$ . Assim, tem-se que

$$\sigma_0 = \frac{4}{25}\sigma_0 - \frac{2}{5}\frac{\Delta P}{A_1} \Rightarrow \Delta P = -\frac{21}{10}\sigma_0 A_1 \Rightarrow \Delta P = P_5 - P_4 = P_5, \quad (3.30)$$

pelo que

$$\sigma_A = -\frac{1}{10}\sigma_0 \quad \text{e} \quad \sigma_B = \sigma_0.$$

Quando a reversão de carga atinge  $P_6 = -4\sigma_0 A_1$ , as tensões podem ser obtidas de acordo com o raciocínio anteriormente apresentado, obtendo-se, para os modelos de encruamento isotrópico, cinemático e misto:

$$\sigma_A = -\frac{172}{225}\sigma_0 \quad \text{e} \quad \sigma_B = \frac{364}{225}\sigma_0$$

$$\sigma_A = -\frac{28}{25}\sigma_0 \quad \text{e} \quad \sigma_B = \frac{36}{25}\sigma_0$$

e

$$\sigma_A = -\frac{264}{250}\sigma_0 \quad \text{e} \quad \sigma_B = \frac{368}{250}\sigma_0,$$

respetivamente. De igual modo, quando a carga atinge o valor da posição inicial  $P_7 = 0$ , as tensões podem ser obtidas de acordo com o raciocínio anteriormente apresentado, obtendo-se, para os modelos de encruamento isotrópico, cinemático e misto:

$$\sigma_A = \frac{8}{225}\sigma_0 \quad \text{e} \quad \sigma_B = \frac{4}{225}\sigma_0,$$

$$\sigma_A = -\frac{8}{25}\sigma_0 \quad \text{e} \quad \sigma_B = -\frac{4}{25}\sigma_0$$

e

$$\sigma_A = -\frac{64}{250}\sigma_0 \quad \text{e} \quad \sigma_B = -\frac{32}{250}\sigma_0,$$

respetivamente.

Os resultados da evolução das tensões nos elementos A e B com a carga aplicada são apresentados nas tabelas 3.1, 3.2 e 3.3 para os modelos de encruamento isotrópico, cinemático e independente, respetivamente.

Tabela 3.1: Evolução das tensões nos elementos A e B com a carga aplicada, para o modelo de encruamento isotrópico

Incremento de carga	Valor da carga ( $\frac{P}{A_1\sigma_0}$ )	Tensão no elemento A ( $\frac{\sigma_A}{\sigma_0}$ )	Tensão no elemento B ( $\frac{\sigma_B}{\sigma_0}$ )
$P_0$	0	0	0
$P_1$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
$P_2$	$\frac{34}{10}$	1	$-\frac{6}{5}$
$P_3$	4	$\frac{28}{25}$	$-\frac{36}{25}$
$P_4$	0	$\frac{8}{25}$	$\frac{4}{25}$
$P_5$	$-\frac{16}{5}$	$-\frac{8}{25}$	$\frac{36}{25}$
$P_6$	-4	$-\frac{172}{225}$	$\frac{364}{225}$
$P_7$	0	$\frac{8}{225}$	$\frac{4}{225}$

Após a resolução analítica do problema procede-se à apresentação das curvas obtidas com base no programa Plast1D. Pretende-se aferir o bom funcionamento do código e

Tabela 3.2: Evolução das tensões nos elementos A e B com a carga aplicada, para o modelo de encruamento cinemático

Incremento de carga	Valor da carga( $\frac{P}{A_1\sigma_0}$ )	Tensão no elemento A ( $\frac{\sigma_A}{\sigma_0}$ )	Tensão no elemento B ( $\frac{\sigma_B}{\sigma_0}$ )
$P_0$	0	0	0
$P_1$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
$P_2$	$\frac{34}{10}$	1	$-\frac{6}{5}$
$P_3$	4	$\frac{28}{25}$	$-\frac{36}{25}$
$P_4$	0	$\frac{8}{25}$	$\frac{4}{25}$
$P_5$	-1	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$
$P_6$	-4	$-\frac{28}{25}$	$-\frac{36}{25}$
$P_7$	0	$-\frac{8}{25}$	$\frac{4}{25}$

Tabela 3.3: Evolução das tensões nos elementos A e B com a carga aplicada, para o modelo de encruamento independente

Incremento de carga	Valor da carga( $\frac{P}{A_1\sigma_0}$ )	Tensão no elemento A ( $\frac{\sigma_A}{\sigma_0}$ )	Tensão no elemento B ( $\frac{\sigma_B}{\sigma_0}$ )
$P_0$	0	0	0
$P_1$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
$P_2$	$\frac{34}{10}$	1	$-\frac{6}{5}$
$P_3$	4	$\frac{28}{25}$	$-\frac{36}{25}$
$P_4$	0	$\frac{8}{25}$	$\frac{4}{25}$
$P_5$	$-\frac{21}{10}$	$-\frac{1}{10}$	1
$P_6$	-4	$-\frac{264}{250}$	$\frac{368}{250}$
$P_7$	0	$-\frac{64}{250}$	$-\frac{32}{250}$

chegar aos resultados obtidos analiticamente. Como o principal objetivo é demonstrar a modelação das curvas tensão-deformação e força-deslocamento foram arbitrados valores para os parâmetros mecânicos, de maneira a que a visualização das curvas fosse o mais perceptível possível. A tabela 3.4 apresenta os valores considerados.

Tabela 3.4: Tabela de parâmetros mecânicos considerados

Módulo de Elasticidade, $E$ [MPa]	Área da secção transversal, $A$ [mm <sup>2</sup> ]	Tensão de cedência, $\sigma_0$ [MPa]
5000	1	6

Os resultados numéricos obtidos com base no programa Plast1D são agora apresentados, encontrando-se a curva força-deslocamento representada na figura 3.9, para as três leis de encruamento em estudo. A figura 3.10 apresenta, para o encruamento isotrópico, a curva tensão-deformação para cada elemento da estrutura. Como a carga é aplicada entre os dois elementos, o elemento A está à tração enquanto que o elemento B está à compressão. Por outro lado, a tabela 3.5 apresenta os resultados de tensão nos elementos obtidos analiticamente. Neste contexto, verifica-se que os valores apresentados na figura 3.10 coincidem com os obtidos analiticamente. Constata-se que a cedência do elemento A ocorre para  $P_2$  enquanto que no elemento B ocorre para  $P_1$ . Para a carga máxima  $P_3$ , a tensão no elemento A corresponde a 6.72 MPa, enquanto que no elemento B corresponde a -8.64 MPa. Assim sendo, verifica-se que os resultados numéricos estão em conformidade com os analíticos, evidenciando o bom funcionamento do programa Plast1D.

Por outro lado, a figura 3.11 apresenta, para o encruamento cinemático, a curva tensão-deformação para cada elemento da estrutura. Como o comportamento dos modelos de encruamento só difere quando se verifica a reversão de carga, na tabela 3.6 apresentam-se apenas os valores analíticos a partir da carga  $P_5$ , inclusive. Verifica-se que em reversão de carga a cedência ocorre a tensão diferente do que o modelo de encruamento isotrópico. Analisando a figura 3.11 e como é de esperar, o primeiro elemento a ceder é o B com uma tensão de 3.36 MPa. Quando a carga máxima  $P_6$  é atingida, a cedência no elemento A ocorre para uma tensão de -6.72 MPa. Nesta fase o elemento B está com um nível de encruamento elevado com uma tensão de 8.64 MPa.

Por fim, a figura 3.12 apresenta, para o encruamento misto, a curva tensão-deformação para cada elemento da estrutura. A tabela 3.7 apresenta os resultados analíticos. Na figura 3.12 verifica-se que a cedência do elemento B ocorre a valores muito próximos de -6 MPa, de acordo a tabela 3.7.

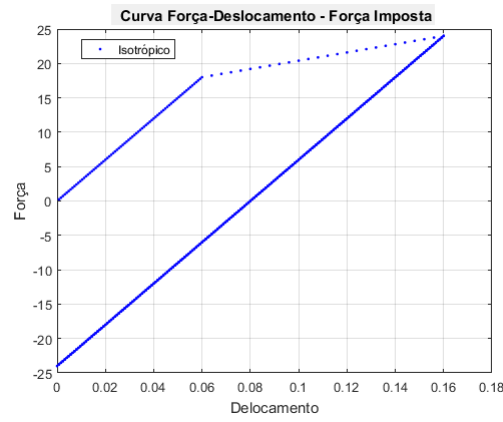
Analisando as várias curvas, constata-se que o comportamento é notoriamente diferente para cada modelo.

### 3.2.3 Problema 3 – Barras em Paralelo

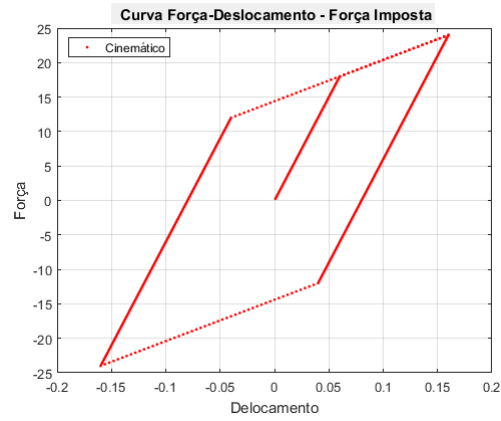
Neste problema considera-se uma estrutura constituída por três barras verticais em paralelo que se encontram ligadas a um elemento rígido móvel, tal como se ilustra na figura 3.13. A estrutura é sujeita a reversão de carga pela imposição de uma força vertical  $P$  aplicada no elemento rígido. Considera-se uma secção transversal das barras  $A$ , tensões de cedência  $\sigma_{Y1} = \sigma_{Y3} = 2\sigma_{Y2}$  e um módulo plástico  $H = \frac{E}{6}$ . Considera-se que a estrutura é sujeita ao seguinte carregamento de força vertical imposta:

$$P = 0 \rightarrow 6A\sigma_{Y2} \rightarrow 0 \rightarrow -6A\sigma_{Y2} \rightarrow 0. \quad (3.31)$$

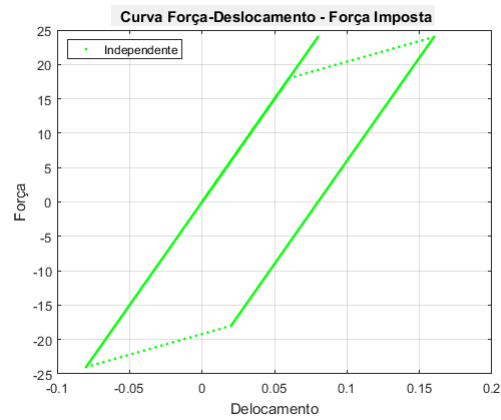




(a)



(b)



(c)

Figura 3.9: Curva força-deslocamento para força imposta e lei de encruamento (a) isotrópico (b) cinemático e (c) misto ( $\beta = 0.5$ ) para o problema 2.

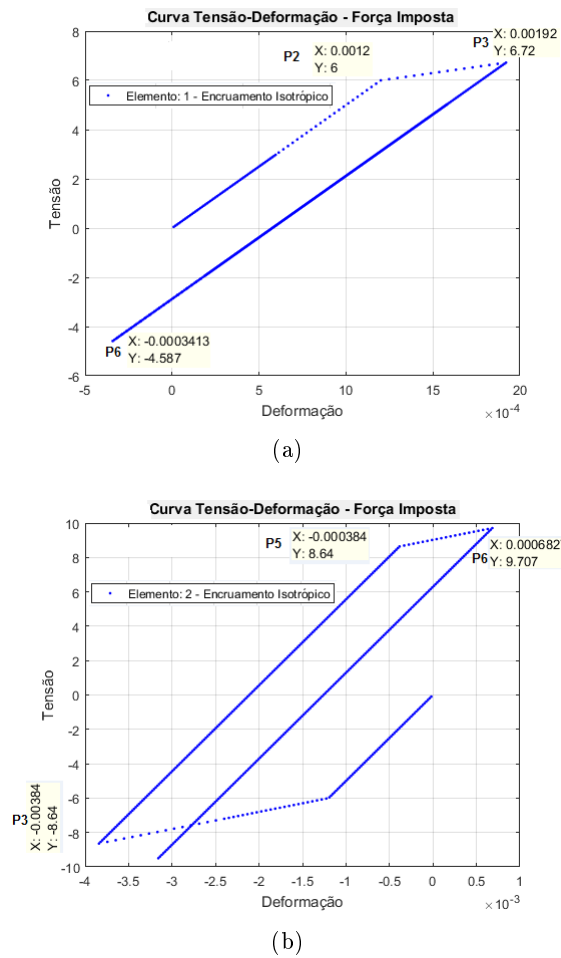


Figura 3.10: Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento isotrópico do (a) elemento A e (b) elemento B para o problema 2.

Tabela 3.5: Valores analíticos para tensão e carga dos elementos A e B para a lei do encruamento isotrópico

Carga P	Valor de P [N]	Tensão no elemento A [MPa]	Tensão no elemento B [MPa]
$P_0$	0	0	0
$P_1$	15	3	-6
$P_2$	20.4	6	7.2
$P_3$	24	6.72	-8.64
$P_4$	0	1.92	0.96
$P_5$	-19.2	-1.92	8.64
$P_6$	-24	-4.58	9.7
$P_7$	0	0.213	0.106

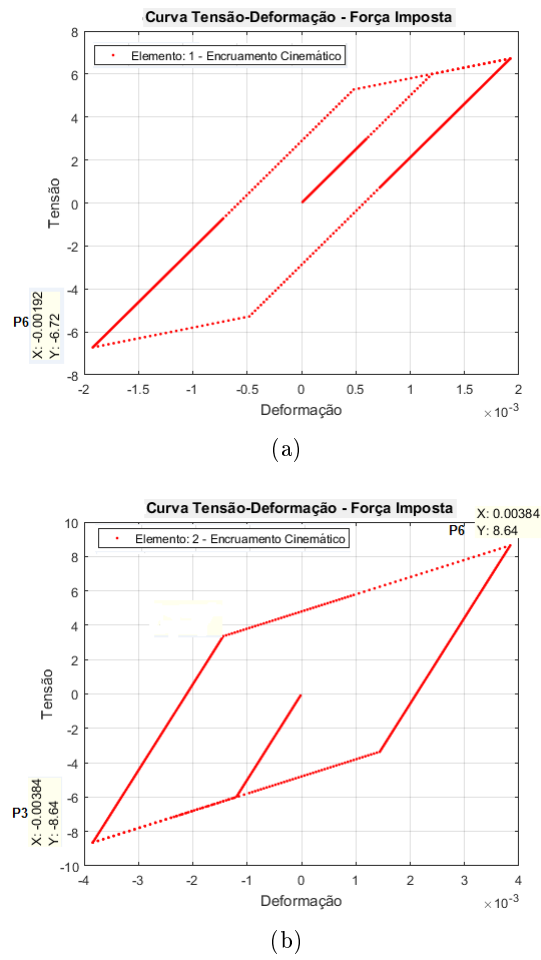


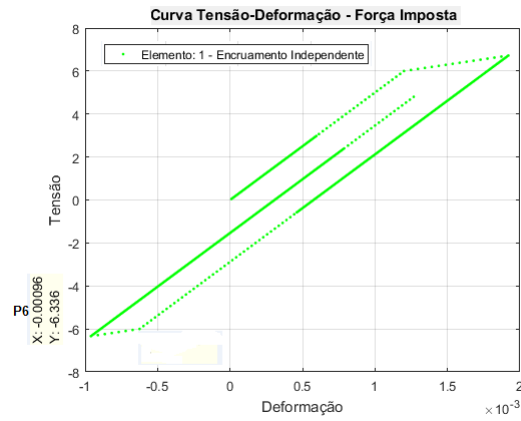
Figura 3.11: Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento cinemático do (a) elemento A e (b) elemento B para o problema 2.

Tabela 3.6: Valores analíticos para tensão e carga dos elementos A e B para a lei de encruamento cinemático

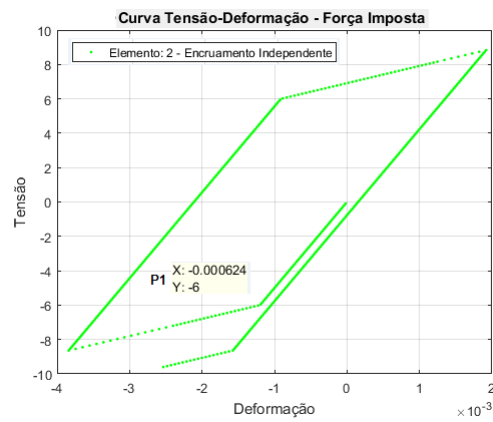
Carga P	Valor de P [N]	Tensão no elemento A [MPa]	Tensão no elemento B [MPa]
$P_5$	-6	0.72	3.36
$P_6$	-24	-6.72	8.64
$P_7$	0	-1.92	0.96

Tabela 3.7: Valores analíticos para tensão e carga dos elementos A e B para a lei de encruamento independente

Carga P	Valor de P [N]	Tensão no elemento A [MPa]	Tensão no elemento B [MPa]
$P_5$	-6	-0.6	-6
$P_6$	-24	-6.336	8.832
$P_7$	0	-1.536	-0.768



(a)



(b)

Figura 3.12: Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento misto do (a) elemento A e (b) elemento B para o problema 2.

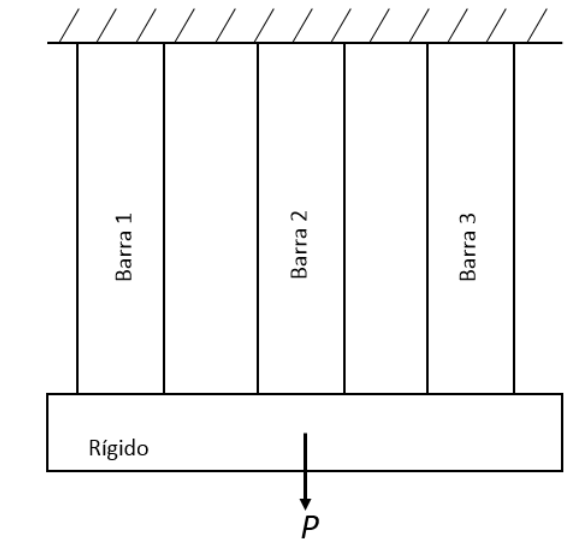


Figura 3.13: Barras verticais em paralelo ligadas a um elemento rígido móvel. Adapt. [15].

Atendendo a que na resolução deste problema se segue a mesma metodologia de cálculo que foi utilizada na resolução do Problema 2, procede-se em seguida apenas à apresentação dos valores analíticos da evolução, com a força aplicada, da tensão nos elementos 1 e 2 [15]. Assim, as tabelas 3.8, 3.9 e 3.10 apresentam essa evolução para os modelos de encruamento isotrópico, cinemático e misto, respetivamente. Note-se que o elemento 1 e 3 são iguais, pelo que apenas se apresentam os valores para o elemento 1.

Tabela 3.8: Evolução da tensão com a carga aplicada na estrutura, para o modelo de encruamento isotrópico

Carga ( $\frac{P}{A\sigma_{Y2}}$ )	Tensão no elemento 1 ( $\frac{\sigma_1}{\sigma_{Y2}}$ )	Tensão no elemento 2 ( $\frac{\sigma_2}{\sigma_{Y2}}$ )
0	0	0
3	1	1
$\frac{36}{7}$	2	$\frac{8}{7}$
6	$\frac{16}{7}$	$\frac{10}{7}$
0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$
$-\frac{18}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{10}{7}$
-6	$-\frac{76}{35}$	$-\frac{58}{35}$
0	$-\frac{6}{35}$	$-\frac{12}{35}$

Com o programa Plast1D foram obtidas curvas de tensão-deformação e força-deslocamento, considerando uma tensão de cedência  $\sigma_y = 6$  MPa, um módulo de elasticidade  $E = 5000$  MPa e uma área da secção transversal  $A = 1$  mm<sup>2</sup>. A figura 3.14 apresenta a curva força-deslocamento estrutural, para o ponto de aplicação da carga. Mais uma vez, como os elementos 1 e 3 são iguais, são apenas apresentados os resultados dos elementos 1 e 2.

Tabela 3.9: Evolução da tensão com a carga aplicada na estrutura, para o modelo de encruamento cinemático

Carga ( $\frac{P}{A\sigma_{Y2}}$ )	Tensão no elemento 1 ( $\frac{\sigma_1}{\sigma_{Y2}}$ )	Tensão no elemento 2 ( $\frac{\sigma_2}{\sigma_{Y2}}$ )
0	0	0
3	1	1
$\frac{36}{7}$	2	$\frac{8}{7}$
6	$\frac{16}{7}$	$\frac{10}{7}$
0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$
$-\frac{30}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$-\frac{6}{7}$
-6	$-\frac{16}{7}$	$-\frac{10}{7}$
0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

Tabela 3.10: Evolução da tensão com a carga aplicada na estrutura, para o modelo de encruamento misto

Carga ( $\frac{P}{A\sigma_{Y2}}$ )	Tensão no elemento 1 ( $\frac{\sigma_1}{\sigma_{Y2}}$ )	Tensão no elemento 2 ( $\frac{\sigma_2}{\sigma_{Y2}}$ )
0	0	0
3	1	1
$\frac{36}{7}$	2	$\frac{8}{7}$
6	$\frac{16}{7}$	$\frac{10}{7}$
0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$
$-\frac{9}{7}$	$-\frac{1}{7}$	-1
$-\frac{258}{49}$	-2	$-\frac{62}{49}$
-6	$-\frac{110}{49}$	$-\frac{74}{49}$
0	$-\frac{12}{49}$	$\frac{24}{49}$

Na figura 3.15 apresenta-se a curva tensão-deformação para os dois elementos em estudo obtida para o modelo de encruamento isotrópico. Os valores analíticos correspondentes são apresentados na tabela 3.11. Da análise dos resultados da figura 3.15 e da tabela 3.11 verifica-se que os valores não são exatamente iguais, havendo uma pequena diferença entre eles, mas que é desprezável. De facto, verifica-se que para o encruamento isotrópico a cedência no elemento 1 se dá a uma tensão de 11.98 MPa, enquanto que o valor analítico é de 12 MPa. Este facto pode ser atribuído à aproximação numérica associada ao processo incremental-iterativo. Verifica-se, ainda, que quando ocorre a cedência no elemento 2, o valor da tensão é de 6 MPa, pois este elemento tem metade da tensão de cedência do elemento 1. Em reversão de carga, o elemento 1 cede a uma tensão de -12.9 MPa, enquanto que o elemento 2 cede primeiro a uma tensão de -8.61 MPa.

Na figura 3.16 apresenta-se a curva tensão-deformação para os dois elementos em estudo obtida para o modelo de encruamento cinemático. Os valores analíticos correspondentes são apresentados na tabela 3.12. Da análise dos resultados da figura 3.16 e da tabela 3.12 constata-se, mais uma vez, que os resultados fornecidos pelo programa Plast1D são muito semelhantes aos analíticos. São apresentados somente os que correspondem à reversão de carga, visto que em carga os valores são sempre iguais para os diversos modelos em estudo. Na figura 3.16 verifica-se que quando é aplicada a carga máxima, a tensão no elemento 1 é de -13.67 MPa, enquanto que no elemento 2 a tensão é de -8.57 MPa. Comparativamente ao encruamento isotrópico, a cedência ocorre para este modelo a uma tensão menor e a deformação induzida na estrutura é superior.

Por fim, na figura 3.17 apresenta-se a curva tensão-deformação para os dois elementos em estudo obtida para o modelo de encruamento misto. Os valores analíticos correspondentes são apresentados na tabela 3.13. Da figura 3.17 verifica-se que em reversão de carga a cedência ocorre a uma tensão simétrica da correspondente à de carga, de -11.93 MPa para o elemento 1 e -5.97 MPa para o elemento 2, tal como se espera. Para o elemento 1, quando é aplicada a carga máxima, a cedência ocorre a -13.39 MPa, ocorrendo para o elemento 2 para -9.22 MPa.

Tabela 3.11: Valores analíticos para tensão e carga dos elementos 1 e 2 para a lei de encruamento isotrópico

Carga [N]	Tensão no elemento 1 [MPa]	Tensão no elemento 2 [MPa]
0	0	0
18	6	6
30.85	12	6.86
36	13.71	8.57
0	1.71	-3.43
15.43	-3.48	-8.57
-36	-12.667	-9.943
0	-1	-2.06

### 3.2.4 Problema 4 – Treliça

As treliças são muito comuns em engenharia estrutural, aplicadas em edifícios e pontes em que se recorre a estruturas metálicas deste tipo. O efeito dos ciclos de reversão de

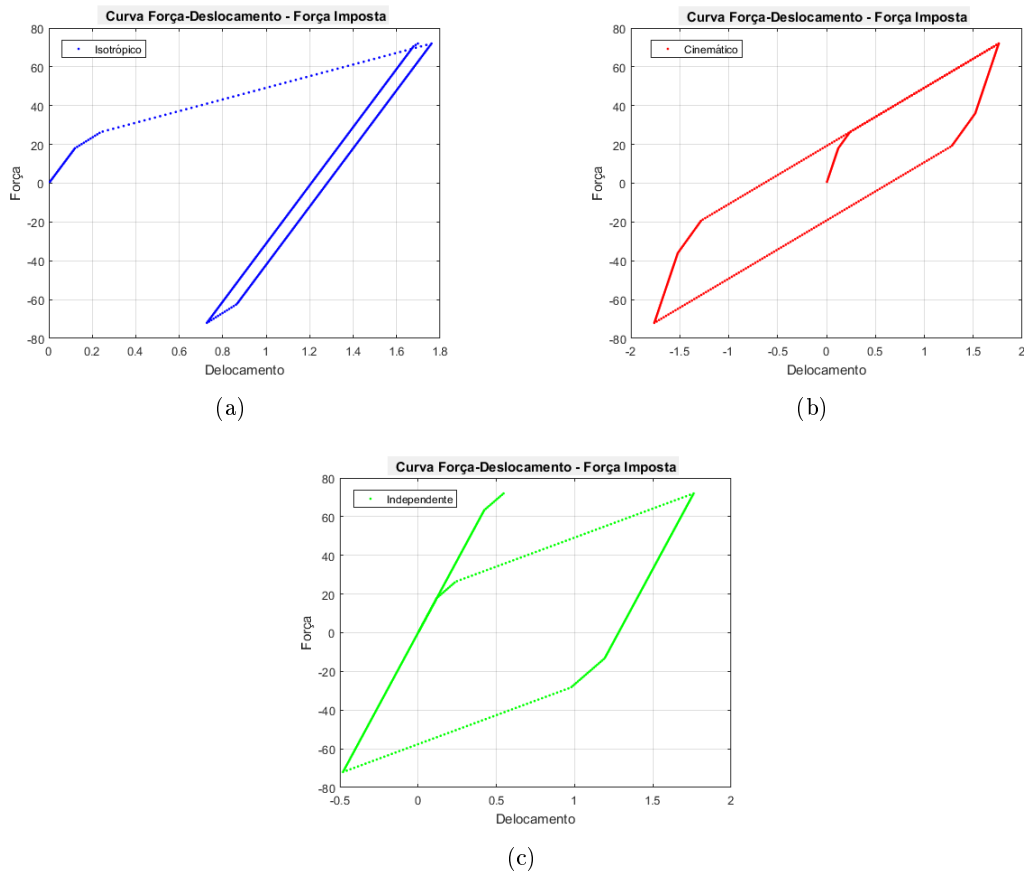


Figura 3.14: Curva força-deslocamento para força imposta e lei de encruamento (a) isotrópico, (b) cinemático e (c) misto do problema 3.

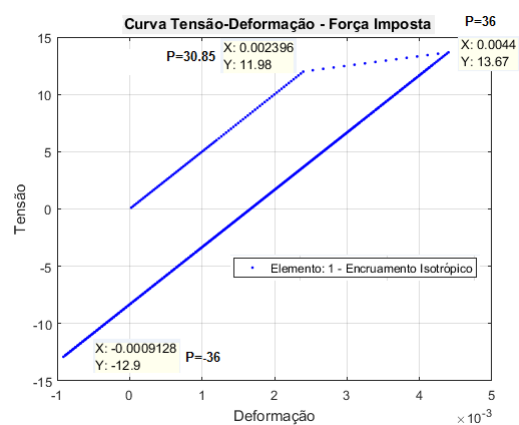
Tabela 3.12: Valores analíticos para tensão e carga dos elementos 1 e 2 para a lei de encruamento cinemático

Carga [N]	Tensão no elemento 1 [MPa]	Tensão no elemento 2 [MPa]
30.85	-10.29	-5.14
-72	-13.71	-8.57
0	-1.71	-3.43

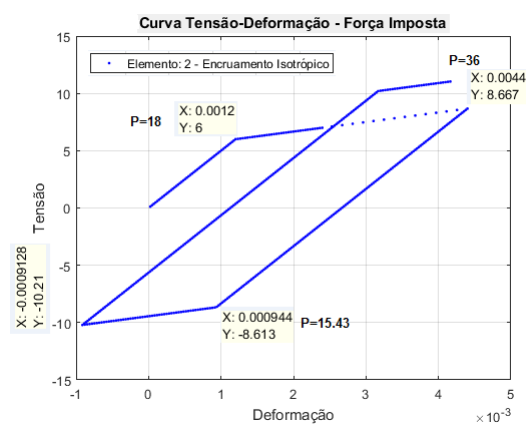
Tabela 3.13: Valores analíticos para tensão e carga dos elementos 1 e 2 para a lei de encruamento misto

Carga [N]	Tensão no elemento 1 [MPa]	Tensão no elemento 2 [MPa]
30.85	-10.29	-5.14
-31.59	-12	-7.59
-72	-13.71	-8.57
0	-1.71	-3.43



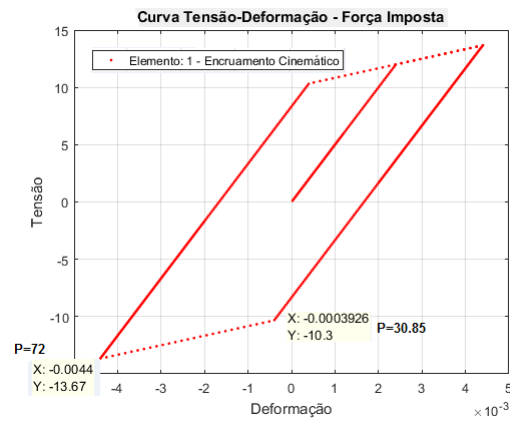


(a)

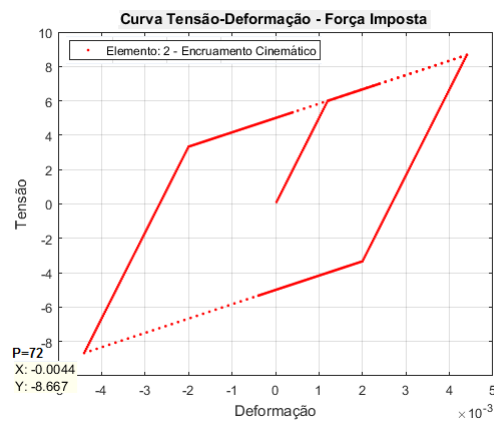


(b)

Figura 3.15: Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento isotrópico do (a) elemento 1 e (b) elemento 2 para o problema 3.

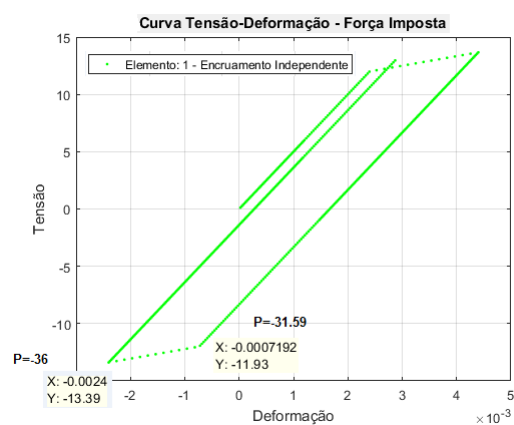


(a)

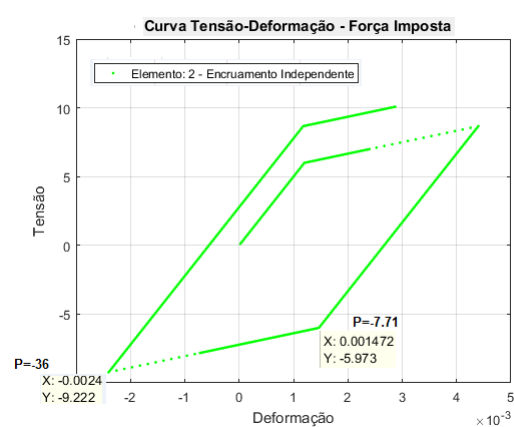


(b)

Figura 3.16: Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento cinemático do (a) elemento 1 e (b) elemento 2 para o problema 3.



(a)



(b)

Figura 3.17: Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento misto do (a) elemento 1 e (b) elemento 2 para problema 3.

carga são de extrema importância no estudo do comportamento deste tipo de estrutura, pois esta estará sujeita a cargas deste tipo quando ocorrem fenómenos naturais, tendo de estar dimensionadas para suportar elevadas cargas. Neste contexto, vai estudar-se a treliça constituída por três barras apresentada na figura 3.18, sujeita a reversão de carga pela imposição de uma força vertical  $P$  aplicada na sua extremidade livre. Considera-se uma tensão de cedência  $\sigma_y = 6$  MPa, um módulo de elasticidade  $E = 5000$  MPa, uma área da secção transversal  $A = 1$  mm<sup>2</sup>, com comprimento  $L = 100$  mm, um módulo plástico  $H = \frac{E}{4}$  MPa e uma força imposta  $P = 6A\sigma_0$  N. Este problema é resolvido unicamente com base no programa Plast1D, com o intuito de resolver numericamente problemas que envolvam uma maior complexidade de cálculo analítico.

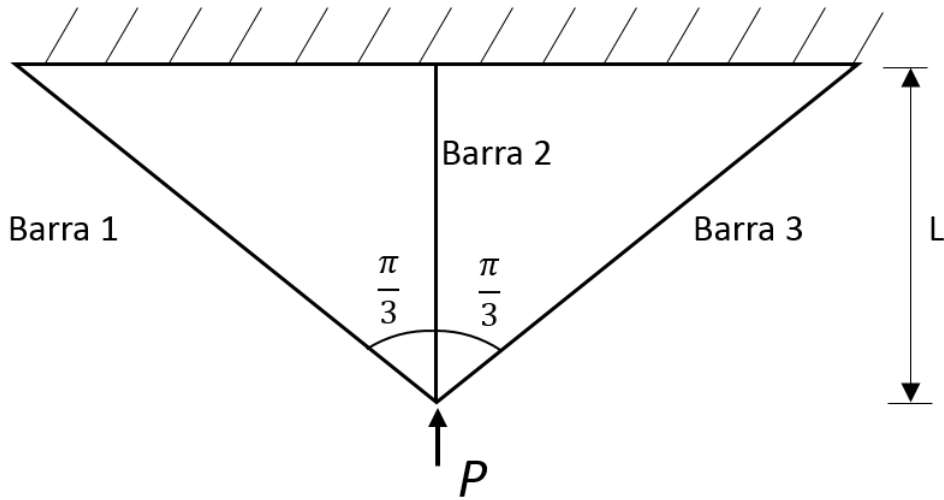
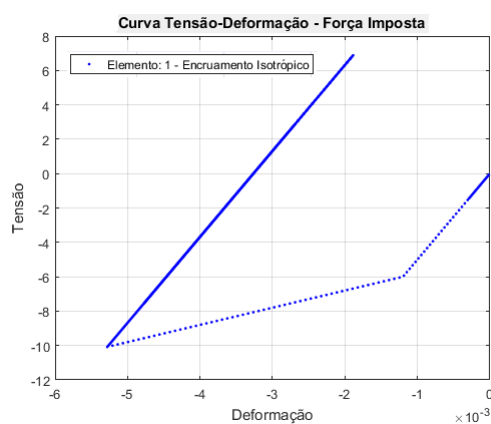
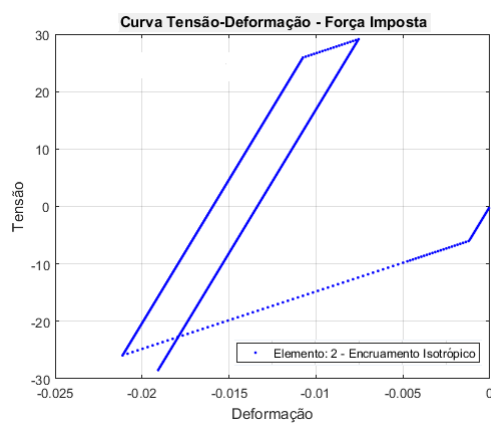


Figura 3.18: Treliça constituída por três barras, com força imposta na sua extremidade livre. Adapt. [15].

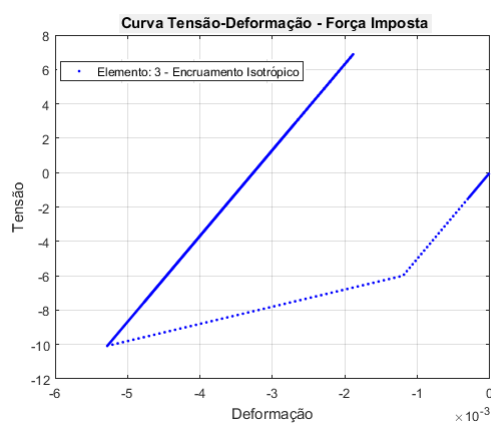
As figuras 3.19, 3.20 e 3.21 apresentam, respetivamente para os modelos de encruamento isotrópico, cinemático e misto, as curvas tensão-deformação obtidas numericamente para os três elementos em estudo. Nestas figuras, verifica-se que devido à simetria da estrutura, o comportamento é o mesmo para os elementos 1 e 3. Por outro lado, o elemento 2, estando na vertical, encontra-se sujeito a níveis de carga (vertical) superiores. Por outro lado, a evolução da relação força-deslocamento estrutural é apresentada na figura 3.22, para o ponto de aplicação de força. Nestas curvas pode observar-se o comportamento não-linear estrutural associado à variação de declive da relação, tanto em situação de carga como de descarga. Constata-se que as barras cedem em instantes diferentes, sendo a evolução da relação força-deslocamento bastante diferente para cada um dos modelos de encruamento.



(a)

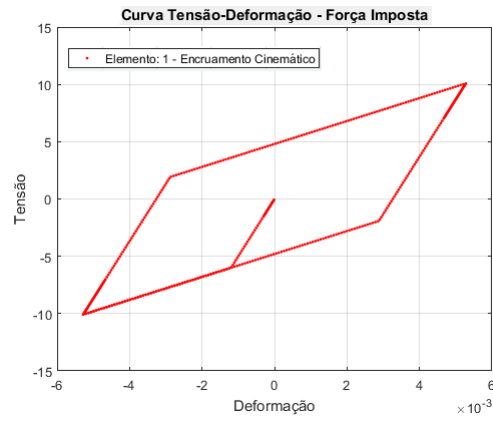


(b)

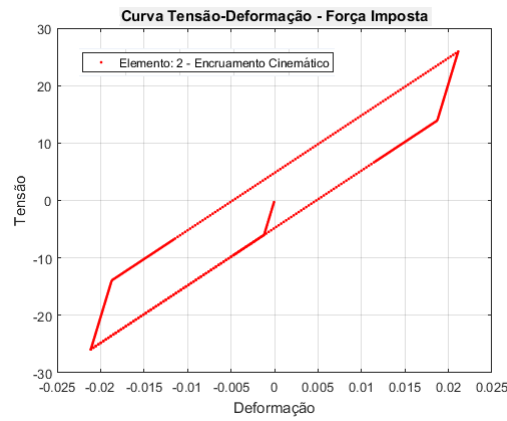


(c)

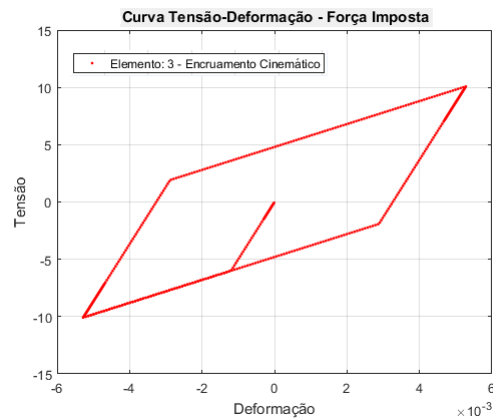
Figura 3.19: Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento isotrópico do (a) elemento 1, (b) elemento 2 e (c) elemento 3 do problema 4.



(a)

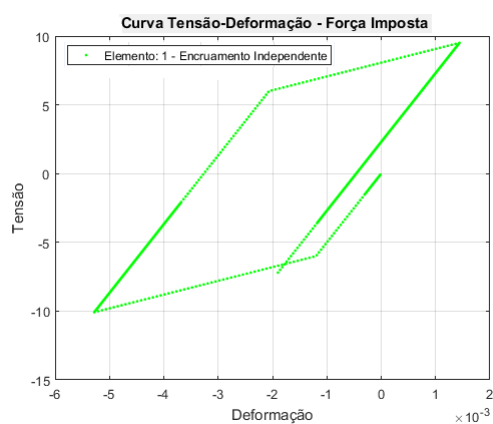


(b)

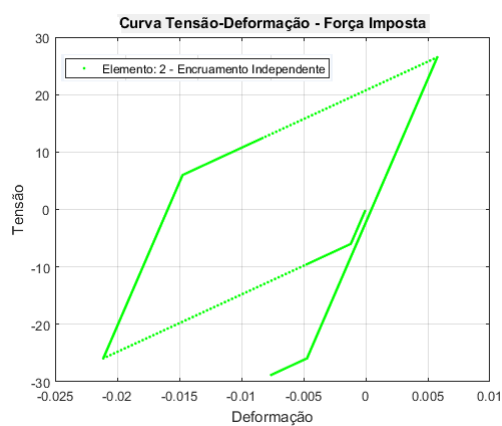


(c)

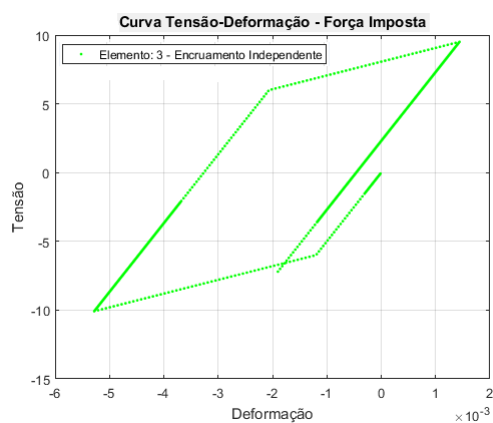
Figura 3.20: Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento cinemático do (a) elemento 1, (b) elemento 2 e (c) elemento 3 do problema 4.



(a)

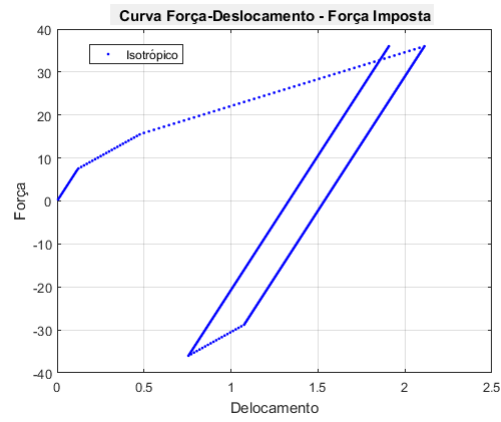


(b)

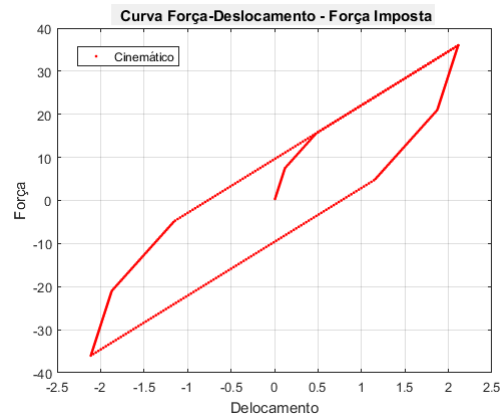


(c)

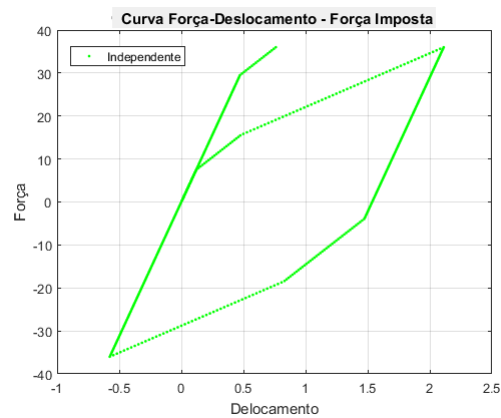
Figura 3.21: Curva tensão-deformação para força imposta e lei de encruamento misto do (a) elemento 1, (b) elemento 2 e (c) elemento 3 do problema 4.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.22: Curva força-deslocamento para força imposta e lei de encruamento (a) isotrópico, (b) cinemático e (c) misto do problema 4.



## Capítulo 4

# Considerações Finais

*Neste capítulo são apresentadas as conclusões gerais deste trabalho, bem como algumas perspectivas de trabalho futuro*

---

### 4.1 Conclusões Gerais

Os ensaios com reversão de carga cíclica são de extrema importância na simulação do comportamento elastoplástico das estruturas quando ocorrem fenômenos de vibração e sismos. Assim, neste trabalho foi desenvolvido um programa denominado Plast1D em ambiente Matlab, que se propõe a simular ciclos com reversão de carga para Elastoplasticidade Clássica 1D com encruamento linear. Esta opção vem no sentido de simplificar os cálculos realizados numericamente e computacionalmente, permitindo, no entanto, modelar e analisar o comportamento de estruturas através de curvas tensão-deformação bilineares.

Foram efetuados ensaios numéricos de reversão de carga em estruturas predefinidas. Os resultados foram obtidos em forma de curvas tensão-deformação e força-deslocamento, no sentido de analisar o comportamento da estrutura ao longo de um ciclo de carga. Os modelos de encruamento mais comuns (isotrópico, cinemático e misto) foram aqui analisados e implementados. A determinação dos pontos de cedência em ensaios com reversão de carga para cada modelo de encruamento e o efeito da lei do encruamento no comportamento da estrutura foram aqui abordados. Por outro lado, a consideração da resolução analítica de problemas estruturais simples permitiu aprofundar conhecimentos e facilitar a compreensão da evolução das curvas tensão-deformação, a determinação dos pontos de cedência de uma estrutura e, além disso, comprovar o bom funcionamento do algoritmo Plast1D. Os três modelos de encruamento foram analisados com base em curvas provenientes do programa desenvolvido.

Aprofundar o conhecimento na área da elastoplasticidade e o desenvolvimento de uma ferramenta de cálculo estrutural que permitisse simular a elastoplasticidade 1D com modelos de encruamento linear era o principal objetivo deste trabalho. Assim sendo, pode afirmar-se que os resultados obtidos foram ao encontro do que era expectável.

## 4.2 Propostas para Trabalho Futuro

A modelação do comportamento de estruturas metálicas é bastante importante para um engenheiro mecânico, visto que os metais são muito utilizados a nível industrial. Nesse contexto, a compreensão das leis que determinam o comportamento destes materiais é bastante importante em termos de visão não só teórica mas também académica.

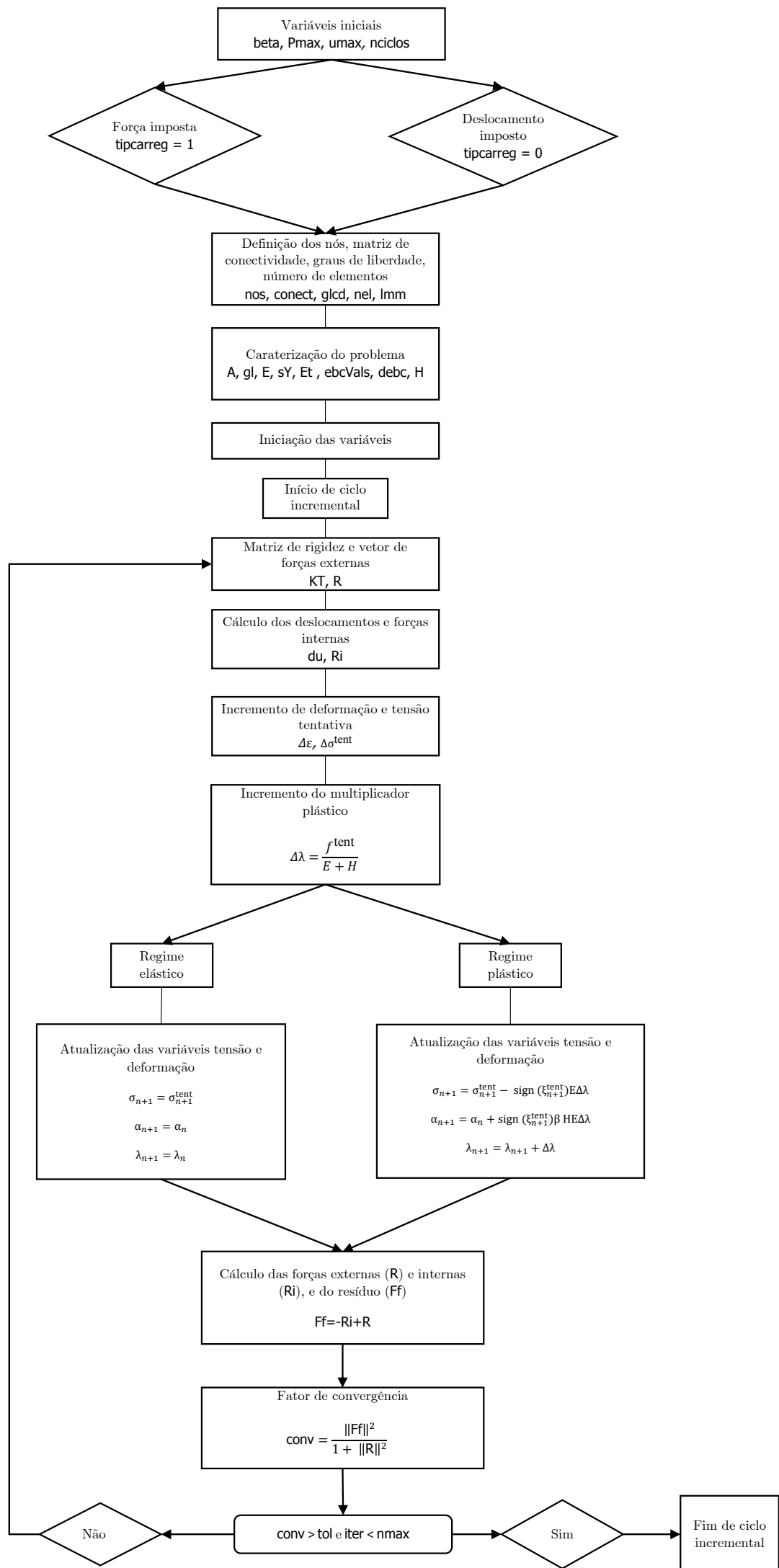
Além disso, as leis do encruamento linear são uma ferramenta útil para a aprendizagem e a compreensão do comportamento elastoplástico de estruturas metálicas. No entanto, na natureza as leis de encruamento linear poderão não prever com exatidão o comportamento estrutural. Assim, uma vez que na presente dissertação foi desenvolvida uma ferramenta de cálculo estrutural para encruamento linear em elastoplasticidade 1D, futuramente seria interessante desenvolver-se uma mesma ferramenta, mas para modelos de encruamento não-linear, tais como os de Ramberg-Osgood e de Voce.

Por outro lado, poder-se-ia generalizar o código para situações 2D e 3D, o que permitiria uma maior aproximação à realidade.

Do ponto de vista da engenharia mecânica é de todo interesse desenvolver e aplicar ferramentas que permitam um cálculo computacional mais avançado e aplicar essa metodologia ao estudo do comportamento estrutural.

## Apêndice A

# Fluxograma do Programa Plast1D



## Apêndice B

# Programa Plast1D

```
%% Plast1D
% Plasticidade de von Mises com encruamento isotrópico linear
% combinado com encruamento cinemático
prtype = 0;% variáveis a visualizar: (eps,sigm) = 0, (u,R) = 1
beta = 0.5 * [1,1];% isotropico = 0, cinemático = 1, misto > 0 & < 1
tipcarreg = 1;% tipo de carregamento: deslocamento = 0, força = 1
Pmax = 15;% carga máxima imposta [N]
umax=1;% deslocamento máximo imposto [mm]
nciclos=1;% número de ciclos: 0 a k
nppciclo=100;% número de pontos por ciclo
if tipcarreg == 0
    uimp = umax/nppciclo;% deslocamento imposto
    cargaldesl=ones(nppciclo,1);cargadesl=ones(2*nppciclo,1);
    factorcarga=zeros(nppciclo*(1+4*nciclos),1);
    factorcarga(1:nppciclo)=cargaldesl;
    if nppciclo >= 1
        for i=1:nciclos
            factorcarga(nppciclo*(1+(i-1)*4)+1:nppciclo*(3+(i-1)*4))=-1*cargadesl;
            factorcarga(nppciclo*(3+(i-1)*4)+1:nppciclo*(5+(i-1)*4))=cargadesl;
        end
    end
elseif tipcarreg == 1
    Pimp = Pmax/nppciclo;% carga imposta
    cargalf = repmat(1:nppciclo,1);cargaf = repmat(1:2*nppciclo,1);
    factorcarga=zeros(nppciclo*(1+4*nciclos),1);
    factorcarga(1:nppciclo)=cargalf; % determinar o fator de carga
    if nppciclo >= 1
        for i=1:nciclos
            factorcarga(nppciclo*(1+(i-1)*4)+1:nppciclo*(3+(i-1)*4))=nppciclo-1*cargaf
            ;
            factorcarga(nppciclo*(3+(i-1)*4)+1:nppciclo*(5+(i-1)*4))=-1*nppciclo+
            cargaf;
        end
    end
end
end
#####
nos = 100*[0, 0; 1, 0; 2, 0];% coordenadas dos nós
conect=[1, 2; 2, 3];% conectividades
gl=2*length(nos);% número de GL total %dois por nó
nel = length(conect);% número de elementos
lmm = [1, 2, 3, 4; 3, 4, 5, 6];% GL dos elementos
```

```

if tipcarreg == 0
    debc = [1, 2, 4, 5, 6]; % GL com deslocamentos prescritos
    ebcVals=[0, 0, 0, 1, 0];% zeros(length(debc),1);% deslocamentos prescritos
    df = [3];% GL com forças impostas
    glcd = 3;% GL de controle da deformacao
else
    debc = [1, 2, 4, 6]; % GL com deslocamentos prescritos
    ebcVals=[0, 0, 0, 0];% deslocamentos prescritos
    df = [3,5];% GL com forças impostas
    glcf = 5;% GL de controle em força
end
glsr = glcf;% GL de saída de resultados
elsr = 1;% Elem. de saída de resultados
A = [1,1];% área da secção transversal [mm^2]
E = [5000, 5000];% módulo de elasticidade [MPa]
sY = [6, 6];% tensão de cedência [MPa]
H=E/4;% Relacao mod plast[MPa]
Et(1:nel) = E(1:nel)*(1 - E(1:nel)/(E(1:nel) + H(1:nel)));% módulo tangente para
    cada elemento
% Controle de convergência
tol = 1e-7;% tolerância de convergência
nmax = 10;% número máximo de iterações
% Iniciação de valores
sigma = zeros(nel,1); novsigma = zeros(nel,1); dsigma = zeros(nel,1);
sigmatent = zeros(nel,1); sigmaced = zeros(nel,1);
epsil = zeros(nel,1); novoepsil = zeros(nel,1); depsil = zeros(nel,1);
defpac = zeros(nel,1); novodefpac = zeros(nel,1);
estado = zeros(nel,1); novestado = zeros(nel,1);
alfa = zeros(nel,1); novoalfa = zeros(nel,1); tolerced = zeros(nel,1);
csitent = zeros(nel,1); dlamb = zeros(nel,1); Cep = zeros(nel,1);
u = zeros(gl,1); du = zeros(gl,1); Ri=zeros(gl,1); Rf = zeros(nel,1);
x1 = zeros(nel,1); y1 = zeros(nel,1); x2 = zeros(nel,1); y2 = zeros(nel,1);
L = zeros(nel,1); ls = zeros(nel,1); ms = zeros(nel,1);
% #####
for step=1:length(factorcarga)
    lambda = factorcarga(step); %incremento de carga
    conv = 1; iter = 1; u = u + du;
    du = zeros(gl,1); % vetor deslocamento
    for i=1:nel %igualar a antiga com a nova para cada elemento
        sigma(i)=novsigma(i);
        epsil(i)=novoepsil(i);
        estado(i)=novestado(i);
        defpac(i)=novodefpac(i);
        alfa(i)=novoalfa(i);
    end
    while conv > tol && iter < nmax
        KT = zeros(gl); R = zeros(gl,1);
        if tipcarreg == 0
            ebcVals(glcd)= lambda*uimp;
        else
            R(glcf) = lambda*Pimp;
        end
        for i=1:nel
            lm = lmm(i,:); %cada elemento
            con=conect(i,:); %cada elemento
            x1(i)=nos(conect(i,1),1); y1(i)=nos(conect(i,1),2);%coord
            x2(i)=nos(conect(i,2),1); y2(i)=nos(conect(i,2),2);%dos nos
            L(i)=sqrt((x2(i)-x1(i))^2+(y2(i)-y1(i))^2); %centro geo

```

```

ls(i)=(x2(i)-x1(i))/L(i); ms(i)=(y2(i)-y1(i))/L(i);%
if novestado(i) == 1
    Cep(i) = Et(i);
else
    Cep(i) = E(i);
end
k = Cep(i)*A(i)/L(i)*[ls(i)^2, ls(i)*ms(i), -ls(i)^2, -ls(i)*ms(i);
ls(i)*ms(i), ms(i)^2, -ls(i)*ms(i), -ms(i)^2; % KT sem nós prescritos
-ls(i)^2, -ls(i)*ms(i), ls(i)^2, ls(i)*ms(i);
-ls(i)*ms(i), -ms(i)^2, ls(i)*ms(i), ms(i)^2];
r = zeros(4,1);
KT(lm, lm) = KT(lm, lm) + k; % soma as matriz rigidez dos 2 elem
R(lm) = R(lm) + r; % soma forças externas dos 2 elem
end
gl = length(R);
df = setdiff(1:gl, debc);%qual é o gl que nao esta prescrito
Kf = KT(df, df);%nova matriz rigidez com os gl livres
Rf(1:length(df)) = -Ri(df(1:length(df))) + R(df(1:length(df)))...
    - KT(df(1:length(df)),debc(:))*ebcVals(:);
dfVals = Kf\Rf;
duiter = zeros(gl,1);
duiter(debc(1:length(debc))) = ebcVals(1:length(debc));
duiter(df(1:length(df))) = dfVals(1:length(df));
reactions=zeros(length(debc),1);
reactions(1:length(debc)) = KT(debc(1:length(debc)),:)*duiter(:)...
    + Ri(debc(1:length(debc))) - R(debc(1:length(debc)));
du = du + duiter;
Ri = zeros(gl,1);
for i=1:nel
    lm = lmm(i,:);
    con=conect(i,:);
    T = [ls(i), ms(i), 0, 0; 0, 0, ls(i), ms(i)];
    depsil(i) = (1/L(i))* [-1, 1]* (T*du(lm));%variação deformação
    novoepsil(i) = epsil(i) + depsil(i); %novo
    dsigma(i) = E(i)*depsil(i);
    tolerced(i) = sY(i)*1.0e-6; %tolerancia para cedencia
    sigmatent(i) = sigma(i) + E(i)*depsil(i); %tensão tent
    csitent(i) = sigmatent(i) - alfa(i); %tensão deslocada tent
    sigmaced(i) = abs(csitent(i)) - (sY(i)+(1-beta(i))*H(i)*defpac(i)); %
        funcao ceden tent
    switch (estado(i))
        case {0}
            if sigmaced(i) > tolerced
                novestado(i) = 1;
            end
        case {1}
            if sigma(i)*dsigma(i) < 0
                novestado(i) = 0;
            end
    end
    if sigmaced(i) < tolerced % teste cedencia
        novsigma(i) = sigmatent(i);
        novoalfa(i) = alfa(i);
        novodefpac(i) = defpac(i); %estado tentativa final
    else
        dlamb(i) = sigmaced(i)/(E(i)+H(i)); %incremento plastico
        novsigma(i) = sigmatent(i) - sign(csitent(i))*E(i)*dlamb(i); %
            atualizar tensão

```

```

        novoalfa(i) = alfa(i) + sign(csitent(i))*beta(i)*H(i)*dlamb(i); %
            atualizar alpha
        novodefpac(i) = defpac(i) + dlamb(i); %atualizar a def plastica
    end
    p = A(i)*novsigma(i);
    ri = T' * [-p; p];
    Ri(lm) = Ri(lm) + ri;
end
Rf = R(df); Ff = -Ri(df) + Rf;
conv = (Ff'*Ff)/(1 + Rf'*Rf);
iter = iter + 1;
end
% Saída de Resultados
if prtttype == 0
    if beta(1) == 1
        graf1=plot(novoepsil(elsr),novsigma(elsr),'.r');
        title('Curva tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend(['Elemento: ' num2str(elsr) ' - Encruamento Cinemático']);
    elseif beta(1) == 0
        graf1=plot(novoepsil(elsr),novsigma(elsr),'.b');
        title('Curva tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend(['Elemento: ' num2str(elsr) ' - Encruamento Isotrópico']);
    else
        graf1=plot(novoepsil(elsr),novsigma(elsr),'.g');
        title('Curva tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend(['Elemento: ' num2str(elsr) ' - Encruamento Independente']);
    end
end

elseif prtttype == 1
    if beta(1) == 1
        graf1=plot(u(glsr)+du(glsr),Ri(glsr),'.r');
        title('Curva Força-Deslocamento - Força Imposta ');
        xlabel('Deslocamento'); ylabel('Força');
        legend('Cinemático');
    elseif beta(1) == 0
        graf1=plot(u(glsr)+du(glsr),Ri(glsr),'.b');
        title('Curva Força-Deslocamento - Força Imposta ');
        xlabel('Deslocamento'); ylabel('Força');
        legend('Isotrópico');
    else
        graf1=plot(u(glsr)+du(glsr),Ri(glsr),'.g');
        title('Curva Força-Deslocamento - Força Imposta ');
        xlabel('Deslocamento'); ylabel('Força');
        legend('Independente');
    end
end
end
hold on; grid on;
end % Fim

```



## Apêndice C

# Programa do Problema 1

```
%% Plast1D
% Plasticidade de von Mises com encruamento isotrópico linear
% combinado com encruamento cinemático
prtype = 0;% variáveis a visualizar: (eps,sigm) = 0, (u,R) = 1
beta = 0.9 * [1,1];% isotropico = 0, cinemático = 1, misto > 0 & < 1
tipcarreg = 1;% tipo de carregamento: deslocamento = 0, força = 1
Pmax = 15;% carga máxima imposta
umax=1;% deslocamento máximo imposto
nciclos=1;% número de ciclos: 0 a k
nppciclo=100;% número de pontos por ciclo
if tipcarreg == 0
    uimp = umax/nppciclo;% deslocamento imposto
    cargaldesl=ones(nppciclo,1);cargadesl=ones(2*nppciclo,1);
    factorcarga=zeros(nppciclo*(1+4*nciclos),1);
    factorcarga(1:nppciclo)=cargaldesl;
    if nppciclo >= 1
        for i=1:nciclos
            factorcarga(nppciclo*(1+(i-1)*4)+1:nppciclo*(3+(i-1)*4))=-1*cargadesl;
            factorcarga(nppciclo*(3+(i-1)*4)+1:nppciclo*(5+(i-1)*4))=cargadesl;
        end
    end
elseif tipcarreg == 1
    Pimp = Pmax/nppciclo;% carga imposta
    cargalf = repmat(1:nppciclo,1);cargaf = repmat(1:2*nppciclo,1);
    factorcarga=zeros(nppciclo*(1+4*nciclos),1);
    factorcarga(1:nppciclo)=cargalf; % determinar o fator de carga
    if nppciclo >= 1
        for i=1:nciclos
            factorcarga(nppciclo*(1+(i-1)*4)+1:nppciclo*(3+(i-1)*4))=nppciclo-1*cargaf
            ;
            factorcarga(nppciclo*(3+(i-1)*4)+1:nppciclo*(5+(i-1)*4))=-1*nppciclo+
            cargaf;
        end
    end
end
end
#####
nos = 100*[0, 0; 1, 0; 2, 0];% coordenadas dos nós
conect=[1, 2; 2, 3];% conectividades
gl=2*length(nos);% número de GL total %dois por nó
nel = length(conect);% número de elementos
lmm = [1, 2, 3, 4; 3, 4, 5, 6];% GL dos elementos
```

```

% Onde as forças/deslocamentos são reduzidos
if tipcarreg == 0
    debc = [1, 2, 4, 5, 6]; % GL com deslocamentos prescritos
    ebcVals=[0, 0, 0, 1, 0];% zeros(length(debc),1);% deslocamentos prescritos
    df = [3];% GL com forças impostas
else
    debc = [1, 2, 4, 6]; % GL com deslocamentos prescritos
    ebcVals=[0, 0, 0, 0];% deslocamentos prescritos
    df = [3, 5];% GL com forças impostas
end
A = [1, 1];% área da secção transversal
E = [5000, 5000];% módulo de elasticidade
sY = [6, 6];% tensão de cedência
H = [1000, 1000]; %módulo plástico
Et(1:nel) = E(1:nel)*(1 - E(1:nel)/(E(1:nel) + H(1:nel)));% módulo tangente para
    cada elemento
% Controle de convergência
tol = 1e-7;% tolerância de convergência
nmax = 10;% número máximo de iterações
% Iniciação de valores
sigma = zeros(nel,1); novsigma = zeros(nel,1); dsigma = zeros(nel,1);
sigmatent = zeros(nel,1); sigmaced = zeros(nel,1);
epsil = zeros(nel,1); novoepsil = zeros(nel,1); depsil = zeros(nel,1);
defpac = zeros(nel,1); novodefpac = zeros(nel,1);
estado = zeros(nel,1); novestado = zeros(nel,1);
alfa = zeros(nel,1); novoalfa = zeros(nel,1); tolerced = zeros(nel,1);
csitent = zeros(nel,1); dlamb = zeros(nel,1); Cep = zeros(nel,1);
u = zeros(gl,1); du = zeros(gl,1); Ri=zeros(gl,1); Rf = zeros(nel,1);
x1 = zeros(nel,1); y1 = zeros(nel,1); x2 = zeros(nel,1); y2 = zeros(nel,1);
L = zeros(nel,1); ls = zeros(nel,1); ms = zeros(nel,1);
% #####
for step=1:length(factorcarga)
    lambda = factorcarga(step); %incremento de carga
    conv = 1; iter = 1; u = u + du;
    du = zeros(gl,1); % vetor deformacao
    for i=1:nel %igualar a antiga com a nova para cada elemento
        sigma(i)=novsigma(i);
        epsil(i)=novoepsil(i);
        estado(i)=novestado(i);
        defpac(i)=novodefpac(i);
        alfa(i)=novoalfa(i);
    end
    while conv > tol && iter < nmax
        KT = zeros(gl); R = zeros(gl,1);
        if tipcarreg == 0
            ebcVals(4)= lambda*uimp; %v_5
        else
            R(5) = lambda*Pimp;%
        end
        for i=1:nel
            lm = lmm(i,:); %cada elemento
            con=conect(i,:); %cada elemento
            x1(i)=nos(conect(i,1),1); y1(i)=nos(conect(i,1),2);%coord
            x2(i)=nos(conect(i,2),1); y2(i)=nos(conect(i,2),2);%dos nos
            L(i)=sqrt((x2(i)-x1(i))^2+(y2(i)-y1(i))^2); %centro geo
            ls(i)=(x2(i)-x1(i))/L(i); ms(i)=(y2(i)-y1(i))/L(i);%
            if novestado(i) == 1
                Cep(i) = Et(i);
            end
        end
    end
end

```

```

else
    Cep(i) = E(i);
end
k = Cep(i)*A(i)/L(i)*[ls(i)^2, ls(i)*ms(i), -ls(i)^2, -ls(i)*ms(i);
ls(i)*ms(i), ms(i)^2, -ls(i)*ms(i), -ms(i)^2;
-ls(i)^2, -ls(i)*ms(i), ls(i)^2, ls(i)*ms(i);
-ls(i)*ms(i), -ms(i)^2, ls(i)*ms(i), ms(i)^2];
r = zeros(4,1);
KT(lm, lm) = KT(lm, lm) + k; % soma as matriz rigidez dos 2 elem
R(lm) = R(lm) + r; % soma forças externas dos 2 elem
end
gl = length(R);
df = setdiff(1:gl, debc); % qual é o gl que não está prescrito
Kf = KT(df, df); % nova matriz rigidez com os gl livres
Rf(1:length(df)) = -Ri(df(1:length(df))) + R(df(1:length(df)))...
    - KT(df(1:length(df)), debc(:))*ebcVals(:);
dfVals = Kf\Rf;
duiter = zeros(gl,1);
duiter(debc(1:length(debc))) = ebcVals(1:length(debc));
duiter(df(1:length(df))) = dfVals(1:length(df));
reactions = zeros(length(debc),1);
reactions(1:length(debc)) = KT(debc(1:length(debc)), :)*duiter(:)...
    + Ri(debc(1:length(debc))) - R(debc(1:length(debc)));
du = du + duiter;
Ri = zeros(gl,1);
for i=1:nel
    lm = lmm(i,:);
    con=conect(i,:);
    T = [ls(i), ms(i), 0, 0; 0, 0, ls(i), ms(i)];
    depsil(i) = (1/L(i))* [-1, 1]*(T*du(lm)); % variação deformação
    novoepsil(i) = epsil(i) + depsil(i); % novo
    dsigma(i) = E(i)*depsil(i);
    tolerced(i) = sY(i)*1.0e-6; % tolerância para cedência
    sigmatent(i) = sigma(i) + E(i)*depsil(i); % tensão tent
    csitent(i) = sigmatent(i) - alfa(i); % tensão deslocada tent
    sigmaced(i) = abs(csitent(i)) - (sY(i)+(1-beta(i))*H(i)*defpac(i)); %
        funcao ceden tent
    switch (estado(i))
        case {0}
            if sigmaced(i) > tolerced
                novestado(i) = 1;
            end
        case {1}
            if sigma(i)*dsigma(i) < 0
                novestado(i) = 0;
            end
    end
    if sigmaced(i) < tolerced % teste cedência
        novsigma(i) = sigmatent(i);
        novoalfa(i) = alfa(i);
        novodefpac(i) = defpac(i); % estado tentativa final
    else
        dlamb(i) = sigmaced(i)/(E(i)+H(i)); % incremento plástico
        novsigma(i) = sigmatent(i) - sign(csitent(i))*E(i)*dlamb(i); %
            atualizar tensão
        novoalfa(i) = alfa(i) + sign(csitent(i))*beta(i)*H(i)*dlamb(i); %
            atualizar alfa
        novodefpac(i) = defpac(i) + dlamb(i); % updated plastic strain
    end
end

```

```

        end
        p = A(i)*novsigma(i);
        ri = T' * [-p; p];
        Ri(lm) = Ri(lm) + ri;
    end
    Rf = R(df); Ff = -Ri(df) + Rf;
    conv = (Ff'*Ff)/(1 + Rf'*Rf);
    iter = iter + 1;
end
% Saída de Resultados
if prttype == 0
    if beta(1) == 1
        grafi=plot(novoepsil(2),novsigma(2),'.r');
        title('Curva Tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend('Cinemático');
    elseif beta(1) == 0
        grafi=plot(novoepsil(2),novsigma(2),'.b');
        title('Curva Tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend('Isotrópico');
    else
        grafi=plot(novoepsil(2),novsigma(2),'.g');
        title('Curva Tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend('Independente');
    end

elseif prttype == 1
    if beta(1) == 1
        grafi=plot(d(5)+du(5),Ri(5),'.r');
    elseif beta(1) == 0
        grafi=plot(d(5)+du(5),Ri(5),'.b');
    else
        grafi=plot(d(5)+du(5),Ri(5),'.g');
    end
end
hold on; grid on;
end % Fim

```

## Apêndice D

# Programa do Problema 2

```
%% Plast1D
% Plasticidade de von Mises com encruamento isotrópico linear
% combinado com encruamento cinemático

prtttype = 0;% variáveis a visualizar: (eps,sigm) = 0, (u,R) = 1
beta = 0 * [1,1];% isotropico = 0, cinemático = 1, misto > 0 & < 1
tipcarreg = 1;% tipo de carregamento: deslocamento = 0, força = 1
A = [1, 2];% área da secção transversal [mm^2]
sY = [6, 6];% tensão de cedência [MPa]
Pmax = 4*A(1)*sY(1);% carga máxima imposta [N]
umax=1;% deslocamento máximo imposto [mm]
nciclos=1;% número de ciclos: 0 a k
nppciclo=100;% número de pontos por ciclo
if tipcarreg == 0
    uimp = umax/nppciclo;% deslocamento imposto
    cargadesl=ones(nppciclo,1);cargadesl=ones(2*nppciclo,1);
    factorcarga=zeros(nppciclo*(1+4*nciclos),1);
    factorcarga(1:nppciclo)=cargadesl;
    if nppciclo >= 1
        for i=1:nciclos
            factorcarga(nppciclo*(1+(i-1)*4)+1:nppciclo*(3+(i-1)*4))=-1*cargadesl;
            factorcarga(nppciclo*(3+(i-1)*4)+1:nppciclo*(5+(i-1)*4))=cargadesl;
        end
    end
elseif tipcarreg == 1
    Pimp = Pmax/nppciclo;% carga imposta
    cargaif = repmat(1:nppciclo,1);cargaf = repmat(1:2*nppciclo,1);
    factorcarga=zeros(nppciclo*(1+4*nciclos),1);
    factorcarga(1:nppciclo)=cargaif; % determinar o fator de carga
    if nppciclo >= 1
        for i=1:nciclos
            factorcarga(nppciclo*(1+(i-1)*4)+1:nppciclo*(3+(i-1)*4))=nppciclo-1*cargaf
            ;
            factorcarga(nppciclo*(3+(i-1)*4)+1:nppciclo*(5+(i-1)*4))=-1*nppciclo+
            cargaf;
        end
    end
end
end
#####
nos = [0, 0; 200/3, 0; 100, 0];% coordenadas dos nós
conect=[1, 2; 2, 3];% conectividades
gl=2*length(nos);% número de GL total %dois por nó
```

```

nel = length(conect);% número de elementos
lmm = [1, 2, 3, 4; 3, 4, 5, 6];% GL dos elementos
% Onde as forças/deslocamentos são reduzidos
if tipcarreg == 0
    debc = [1, 2, 4, 5, 6]; % GL com deslocamentos prescritos
    ebcVals=[0, 0, 0, 1, 0];% zeros(length(debc),1);% deslocamentos prescritos
    df = [3];% GL com forças impostas
    glcd = 4;% GL de controlo em deslocamento (coordenada de ebcVals)
else
    debc = [1, 2, 4, 5, 6]; % GL com deslocamentos prescritos
    ebcVals=[0, 0, 0, 0, 0];% deslocamentos prescritos
    df = [3];% GL com forças impostas
    glcf = 3;% GL de controlo em força (GL de df)
end
glsr = glcf;% GL de saída de resultados (u,R)
elsr =1;% Elem. de saída de resultados (eps,sigm)
E = [5000, 5000];% módulo de elasticidade [MPa]
Et=E/5;% [MPa]
H(1:nel) = E(1:nel).*(Et(1:nel)/(E(1:nel) - Et(1:nel)));% módulo tangente para
    cada elemento
% Controlo de convergência
tol = 1e-7;% tolerância de convergência
nmax = 10;% número máximo de iterações
% Iniciação de valores
sigma = zeros(nel,1); novsigma = zeros(nel,1); dsigma = zeros(nel,1);
sigmatent = zeros(nel,1); sigmaced = zeros(nel,1);
epsil = zeros(nel,1); novoeepsil = zeros(nel,1); depsil = zeros(nel,1);
defpac = zeros(nel,1); novodefpac = zeros(nel,1);
estado = zeros(nel,1); novestado = zeros(nel,1);
alfa = zeros(nel,1); novoalfa = zeros(nel,1); tolerced = zeros(nel,1);
csitent = zeros(nel,1); dlamb = zeros(nel,1); Cep = zeros(nel,1);
u = zeros(gl,1); du = zeros(gl,1); Ri=zeros(gl,1); Rf = zeros(nel,1);
x1 = zeros(nel,1); y1 = zeros(nel,1); x2 = zeros(nel,1); y2 = zeros(nel,1);
L = zeros(nel,1); ls = zeros(nel,1); ms = zeros(nel,1);
% #####
for step=1:length(factorcarga)
    lambda = factorcarga(step); %incremento de carga
    conv = 1; iter = 1; u = u + du;
    du = zeros(gl,1); % vetor deformacao
    for i=1:nel %igualar a antiga com a nova para cada elemento
        sigma(i)=novsigma(i);
        epsil(i)=novoeepsil(i);
        estado(i)=novestado(i);
        defpac(i)=novodefpac(i);
        alfa(i)=novoalfa(i);
    end
    while conv > tol && iter < nmax
        KT = zeros(gl); R = zeros(gl,1);
        if tipcarreg == 0
            ebcVals(glcd)= lambda*uimp;
        else
            R(glcf) = lambda*Pimp;
        end
        for i=1:nel
            lm = lmm(i,:); %cada elemento
            con=conect(i,:); %cada elemento
            x1(i)=nos(conect(i,1),1); y1(i)=nos(conect(i,1),2);%coord
            x2(i)=nos(conect(i,2),1); y2(i)=nos(conect(i,2),2);%dos nos

```

```

L(i)=sqrt((x2(i)-x1(i))^2+(y2(i)-y1(i))^2);           %centro geo
ls(i)=(x2(i)-x1(i))/L(i); ms(i)=(y2(i)-y1(i))/L(i);%
if novestado(i) == 1
    Cep(i) = Et(i);
else
    Cep(i) = E(i);
end
k = Cep(i)*A(i)/L(i)*[ls(i)^2, ls(i)*ms(i), -ls(i)^2, -ls(i)*ms(i);
ls(i)*ms(i), ms(i)^2, -ls(i)*ms(i), -ms(i)^2;
-ls(i)^2, -ls(i)*ms(i), ls(i)^2, ls(i)*ms(i);
-ls(i)*ms(i), -ms(i)^2, ls(i)*ms(i), ms(i)^2];
r = zeros(4,1);
KT(lm, lm) = KT(lm, lm) + k; % soma as matriz rigidez dos 2 elem
R(lm) = R(lm) + r; % soma forças externas dos 2 elem
end
gl = length(R);
df = setdiff(1:gl, debc);%qual é o gl que nao esta prescito
Kf = KT(df, df);%nova matriz rigidez com os gl livres
Rf(1:length(df)) = -Ri(df(1:length(df))) + R(df(1:length(df)))...
    - KT(df(1:length(df)),debc(:))*ebcVals(:);

dfVals = Kf\Rf;
duiter = zeros(gl,1);
duiter(debc(1:length(debc))) = ebcVals(1:length(debc));
duiter(df(1:length(df))) = dfVals(1:length(df));
reactions=zeros(length(debc),1);
reactions(1:length(debc)) = KT(debc(1:length(debc)),:)*duiter(:)...
    + Ri(debc(1:length(debc))) - R(debc(1:length(debc)));
du = du + duiter;
Ri = zeros(gl,1);
for i=1:nel
    lm = lmm(i,:);
    con=conect(i,:);
    T = [ls(i), ms(i), 0, 0; 0, 0, ls(i), ms(i)];
    depsil(i) = (1/L(i))* [-1, 1]* (T*du(lm));%variacao deformacao
    novoepsil(i) = epsil(i) + depsil(i); %novo
    dsigma(i) = E(i)*depsil(i);
    tolerced(i) = sY(i)*1.0e-6; %tolerancia para cedencia
    sigmatent(i) = sigma(i) + E(i)*depsil(i); %tensao tent
    csitent(i) = sigmatent(i) - alfa(i); %tensão deslocada tent
    sigmaced(i) = abs(csitent(i)) - (sY(i)+(1-beta(i))*H(i)*defpac(i)); %
        funcao ceden tent
    switch (estado(i))
        case {0}
            if sigmaced(i) > tolerced
                novestado(i) = 1;
            end
        case {1}
            if sigma(i)*dsigma(i) < 0
                novestado(i) = 0;
            end
        end
    if sigmaced(i) < tolerced % teste cedencia
        novsigma(i) = sigmatent(i);
        novoalfa(i) = alfa(i);
        novodefpac(i) = defpac(i); %estado tentativa final
    else
        dlamb(i) = sigmaced(i)/(E(i)+H(i)); %incremento plastico

```

```

        novsigma(i) = sigmatent(i) - sign(csitent(i))*E(i)*dlamb(i); %
            atualizar tensao
        novoalfa(i) = alfa(i) + sign(csitent(i))*beta(i)*H(i)*dlamb(i); %
            atualizar alpha
        novodefpac(i) = defpac(i) + dlamb(i); %atualizar deformacao
    end
    p = A(i)*novsigma(i);
    ri = T' * [-p; p];
    Ri(lm) = Ri(lm) + ri;
    end
    Rf = R(df); Ff = -Ri(df) + Rf;
    conv = (Ff'*Ff)/(1 + Rf'*Rf);
    iter = iter + 1;
end
% Saída de Resultados
if prttype == 0
    if beta(1) == 1
        grafi=plot(novoepsil(elsr),novsigma(elsr),'.r');
        title('Curva tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend(['Elemento: ' num2str(elsr) ' - Encruamento Cinemático']);
    elseif beta(1) == 0
        grafi=plot(novoepsil(elsr),novsigma(elsr),'.b');
        title('Curva tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend(['Elemento: ' num2str(elsr) ' - Encruamento Isotrópico']);
    else
        grafi=plot(novoepsil(elsr),novsigma(elsr),'.g');
        title('Curva tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend(['Elemento: ' num2str(elsr) ' - Encruamento Independente']);
    end

elseif prttype == 1
    if beta(1) == 1
        grafi=plot(u(glsr)+du(glsr),Ri(glsr),'.r');
        title('Curva Força-Deslocamento - Força Imposta ');
        xlabel('Deslocamento'); ylabel('Força');
        legend('Cinemático');
    elseif beta(1) == 0
        grafi=plot(u(glsr)+du(glsr),Ri(glsr),'.b');
        title('Curva Força-Deslocamento - Força Imposta ');
        xlabel('Deslocamento'); ylabel('Força');
        legend('Isotrópico');
    else
        grafi=plot(u(glsr)+du(glsr),Ri(glsr),'.g');
        title('Curva Força-Deslocamento - Força Imposta ');
        xlabel('Deslocamento'); ylabel('Força');
        legend('Independente');
    end
end
hold on; grid on;
end % Fim

```



## Apêndice E

### Programa do Problema 3

```
%% Plast1D
% Plasticidade de von Mises com encruamento isotrópico linear
% combinado com encruamento cinemático

prtttype = 0;% variáveis a visualizar: (eps,sigm) = 0, (u,R) = 1
beta = 0 * [1,1,1];% isotropico = 0, cinemático = 1, misto > 0 & < 1
tipcarreg = 1;% tipo de carregamento: deslocamento = 0, força = 1
A = [1,1,1];% área da secção transversal [mm^2]
sY = [2*6, 6, 2*6];% tensão de cedência [MPa]
Pmax = 6*A(1)*sY(2);% carga máxima imposta [N]
umax=1;% deslocamento máximo imposto [mm]
nciclos=1;% número de ciclos: 0 a k
nppciclo=100;% número de pontos por ciclo
if tipcarreg == 0
    uimp = umax/nppciclo;% deslocamento imposto
    cargadesl=ones(nppciclo,1);cargadesl=ones(2*nppciclo,1);
    factorcarga=zeros(nppciclo*(1+4*nciclos),1);
    factorcarga(1:nppciclo)=cargadesl;
    if nppciclo >= 1
        for i=1:nciclos
            factorcarga(nppciclo*(1+(i-1)*4)+1:nppciclo*(3+(i-1)*4))=-1*cargadesl;
            factorcarga(nppciclo*(3+(i-1)*4)+1:nppciclo*(5+(i-1)*4))=cargadesl;
        end
    end
elseif tipcarreg == 1
    Pimp = Pmax/nppciclo;% carga imposta
    cargaf = repmat(1:nppciclo,1);cargaf = repmat(1:2*nppciclo,1);
    factorcarga=zeros(nppciclo*(1+4*nciclos),1);
    factorcarga(1:nppciclo)=cargaf;% determinar o fator de carga
    if nppciclo >= 1
        for i=1:nciclos
            factorcarga(nppciclo*(1+(i-1)*4)+1:nppciclo*(3+(i-1)*4))=nppciclo-1*cargaf;
            ;
            factorcarga(nppciclo*(3+(i-1)*4)+1:nppciclo*(5+(i-1)*4))=-1*nppciclo+
                cargaf;
        end
    end
end
end
#####
nos = [0, 0, 0, 100];% coordenadas dos nós
conect=[1,2; 1,2; 1,2];% conectividade
gl=2*length(nos); %length(nos);% número de GL total %dois por nó
```

```

nel = length(conect);% número de elementos
lmm = [1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4];% GL dos elementos
% Onde as forças/deslocamentos são reduzidos
if tipcarreg == 0
    debc = [1, 2, 3]; % GL com deslocamentos prescritos
    ebcVals=[0, 0, 0];% zeros(length(debc),1);% deslocamentos prescritos
    df = [4];% GL com forças impostas
    glcd = 4;% GL de controlo em deslocamento (coordenada de ebcVals)
else
    debc = [1, 2, 3]; % GL com deslocamentos prescritos
    ebcVals=[0, 0, 0];% deslocamentos prescritos
    df = [4];% GL com forças impostas
    glcf = 4;% GL de controlo em força (GL de df)
end
glsr = glcf;% GL de saída de resultados (u,R)
elsr = 3;% Elem. de saída de resultados (eps,sigm)
E = [5000, 5000, 5000];% módulo de elasticidade [MPa]
Et=E/6;% [MPa]
H(1:nel) = E(1:nel).*(E(1:nel)/(E(1:nel) - Et(1:nel)));% módulo tangente para
    cada elemento
% Controlo de convergência
tol = 1e-7;% tolerância de convergência
nmax = 10;% número máximo de iterações
% Iniciação de valores
sigma = zeros(nel,1); novsigma = zeros(nel,1); dsigma = zeros(nel,1);
sigmatent = zeros(nel,1); sigmaced = zeros(nel,1);
epsil = zeros(nel,1); novoeepsil = zeros(nel,1); depsil = zeros(nel,1);
defpac = zeros(nel,1); novodefpac = zeros(nel,1);
estado = zeros(nel,1); novestado = zeros(nel,1);
alfa = zeros(nel,1); novoalfa = zeros(nel,1); tolerced = zeros(nel,1);
csitent = zeros(nel,1); dlamb = zeros(nel,1); Cep = zeros(nel,1);
u = zeros(gl,1); du = zeros(gl,1); Ri=zeros(gl,1); Rf = zeros(nel,1);
x1 = zeros(nel,1); y1 = zeros(nel,1); x2 = zeros(nel,1); y2 = zeros(nel,1);
L = zeros(nel,1); ls = zeros(nel,1); ms = zeros(nel,1);
% #####
for step=1:length(factorcarga)
    lambda = factorcarga(step); %incremento de carga
    conv = 1; iter = 1; u = u + du;
    du = zeros(gl,1); % vetor deformacao
    for i=1:nel %igualar a antiga com a nova para cada elemento
        sigma(i)=novsigma(i);
        epsil(i)=novoeepsil(i);
        estado(i)=novestado(i);
        defpac(i)=novodefpac(i);
        alfa(i)=novoalfa(i);
    end
    while conv > tol && iter < nmax
        KT = zeros(gl); R = zeros(gl,1);
        if tipcarreg == 0
            ebcVals(glcd)= lambda*uimp;
        else
            R(glcf) = lambda*Pimp;
        end
        for i=1:nel
            lm = lmm(i,:); %cada elemento
            con=conect(i,:); %cada elemento
            x1(i)=nos(conect(i,1),1); y1(i)=nos(conect(i,1),2);%coord
            x2(i)=nos(conect(i,2),1); y2(i)=nos(conect(i,2),2);%dos nos

```

```

L(i)=sqrt((x2(i)-x1(i))^2+(y2(i)-y1(i))^2);           %centro geo
ls(i)=(x2(i)-x1(i))/L(i); ms(i)=(y2(i)-y1(i))/L(i);%
if novestado(i) == 1
    Cep(i) = Et(i);
else
    Cep(i) = E(i);
end
k = Cep(i)*A(i)/L(i)*[ls(i)^2, ls(i)*ms(i), -ls(i)^2, -ls(i)*ms(i);
ls(i)*ms(i), ms(i)^2, -ls(i)*ms(i), -ms(i)^2;
-ls(i)^2, -ls(i)*ms(i), ls(i)^2, ls(i)*ms(i);
-ls(i)*ms(i), -ms(i)^2, ls(i)*ms(i), ms(i)^2];
r = zeros(4,1);
KT(lm, lm) = KT(lm, lm) + k; % soma as matriz rigidez dos 2 elem
R(lm) = R(lm) + r; % soma forças externas dos 2 elem
end
gl = length(R);
df = setdiff(1:gl, debc);%qual é o gl que nao esta prescito
Kf = KT(df, df);%nova matriz rigidez com os gl livres
Rf(1:length(df)) = -Ri(df(1:length(df))) + R(df(1:length(df)))...
    - KT(df(1:length(df)),debc(:))*ebcVals(:);

dfVals = Kf\Rf;
duiter = zeros(gl,1);
duiter(debc(1:length(debc))) = ebcVals(1:length(debc));
duiter(df(1:length(df))) = dfVals(1:length(df));
reactions=zeros(length(debc),1);
reactions(1:length(debc)) = KT(debc(1:length(debc)),:)*duiter(:)...
    + Ri(debc(1:length(debc))) - R(debc(1:length(debc)));
du = du + duiter;
Ri = zeros(gl,1);
for i=1:nel
    lm = lmm(i,:);
    con=conect(i,:);
    T = [ls(i), ms(i), 0, 0; 0, 0, ls(i), ms(i)];
    depsil(i) = (1/L(i))* [-1, 1]* (T*du(lm));%variacao deformacao
    novoepsil(i) = epsil(i) + depsil(i); %novo
    dsigma(i) = E(i)*depsil(i);
    tolerced(i) = sY(i)*1.0e-6; %tolerancia para cedencia
    sigmatent(i) = sigma(i) + E(i)*depsil(i); %tensao tentativa
    csitent(i) = sigmatent(i) - alfa(i); %tensao deslocada tent
    sigmaced(i) = abs(csitent(i)) - (sY(i)+(1-beta(i))*H(i)*defpac(i)); %
        funcao ceden tent
    switch (estado(i))
        case {0}
            if sigmaced(i) > tolerced
                novestado(i) = 1;
            end
        case {1}
            if sigma(i)*dsigma(i) < 0
                novestado(i) = 0;
            end
        end
    if sigmaced(i) < tolerced % teste cedencia
        novsigma(i) = sigmatent(i);
        novoalfa(i) = alfa(i);
        novodefpac(i) = defpac(i); %esatdo tentativa final
    else
        dlamb(i) = sigmaced(i)/(E(i)+H(i)); %incremento plastico

```

```

        novsigma(i) = sigmatent(i) - sign(csitent(i))*E(i)*dlamb(i); %
            atualizar tensao
        novoalfa(i) = alfa(i) + sign(csitent(i))*beta(i)*H(i)*dlamb(i); %
            atualizar alpha
        novodefpac(i) = defpac(i) + dlamb(i); %atualização da deformacao
    end
    p = A(i)*novsigma(i);
    ri = T' * [-p; p];
    Ri(lm) = Ri(lm) + ri;
    end
    Rf = R(df); Ff = -Ri(df) + Rf;
    conv = (Ff'*Ff)/(1 + Rf'*Rf);
    iter = iter + 1;
end
% Saída de Resultados
if prtttype == 0
    if beta(1) == 1
        grafi=plot(novoepsil(elsr),novsigma(elsr),'r');
        title('Curva tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend(['Elemento: ' num2str(elsr) ' - Encruamento Cinemático']);

    elseif beta(1) == 0
        grafi=plot(novoepsil(elsr),novsigma(elsr),'b');
        title('Curva tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend(['Elemento: ' num2str(elsr) ' - Encruamento Isotrópico']);

    else
        grafi=plot(novoepsil(elsr),novsigma(elsr),'g');
        title('Curva tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend(['Elemento: ' num2str(elsr) ' - Encruamento Independente']);
    end

elseif prtttype == 1
    if beta(1) == 1
        grafi=plot(u(glsr)+du(glsr),Ri(glsr),'r');
        title('Curva Força-Deslocamento - Força Imposta ');
        xlabel('Deslocamento'); ylabel('Força');
        legend('Cinemático');
    elseif beta(1) == 0
        grafi=plot(u(glsr)+du(glsr),Ri(glsr),'b');
        title('Curva Força-Deslocamento - Força Imposta ');
        xlabel('Deslocamento'); ylabel('Força');
        legend('Isotrópico');
    else
        grafi=plot(u(glsr)+du(glsr),Ri(glsr),'g');
        title('Curva Força-Deslocamento - Força Imposta ');
        xlabel('Deslocamento'); ylabel('Força');
        legend('Independente');
    end
end
hold on; grid on;
end % Fim

```

## Apêndice F

### Programa do Problema 4

```
%% Plast1D
% Plasticidade de von Mises com encruamento isotrópico linear
% combinado com encruamento cinemático
prtype = 1;% variáveis a visualizar: (eps,sigm) = 0, (u,R) = 1
beta = 0.5 * [1,1,1];% isotropico = 0, cinemático = 1, misto > 0 & < 1
tipcarreg = 1;% tipo de carregamento: deslocamento = 0, força = 1
A = [1,1,1];% área da secção transversal [mm^2]
%E = [205e3, 205e3, 205e3];% módulo de elasticidade [MPa]
sY = [6, 6, 6];% tensão de cedência [MPa]
Pmax = 6*A(1)*sY(1);% carga máxima imposta [N]
umax=1;% deslocamento máximo imposto [mm]
nciclos=1;% número de ciclos: 0 a k
nppciclo=100;% número de pontos por ciclo
if tipcarreg == 0
    uimp = umax/nppciclo;% deslocamento imposto
    cargaldesl=ones(nppciclo,1);cargadesl=ones(2*nppciclo,1);
    factorcarga=zeros(nppciclo*(1+4*nciclos),1);
    factorcarga(1:nppciclo)=cargaldesl;
    if nppciclo >= 1
        for i=1:nciclos
            factorcarga(nppciclo*(1+(i-1)*4)+1:nppciclo*(3+(i-1)*4))=-1*cargadesl;
            factorcarga(nppciclo*(3+(i-1)*4)+1:nppciclo*(5+(i-1)*4))=cargadesl;
        end
    end
elseif tipcarreg == 1
    Pimp = Pmax/nppciclo;% carga imposta
    cargalif = repmat(1:nppciclo,1);cargaf = repmat(1:2*nppciclo,1);
    factorcarga=zeros(nppciclo*(1+4*nciclos),1);
    factorcarga(1:nppciclo)=cargalif; % determinar o fator de carga
    if nppciclo >= 1
        for i=1:nciclos
            factorcarga(nppciclo*(1+(i-1)*4)+1:nppciclo*(3+(i-1)*4))=nppciclo-1*cargaf
            ;
            factorcarga(nppciclo*(3+(i-1)*4)+1:nppciclo*(5+(i-1)*4))=-1*nppciclo+
            cargaf;
        end
    end
end
#####
nos = [-2*100*sin(pi/3),100; 0,100 ; 2*100*sin(pi/3),100; 0,0];% coordenadas dos
nós
```

```

conect=[1,4; 2,4; 3,4];% conectividades
gl=2*length(nos);% número de GL total %dois por nó
nel = length(conect);% número de elementos
lmm = [1,2,7,8; 3,4,7,8 ; 5,6,7,8];% GL dos elementos
% Onde as forças/deslocamentos são reduzidos
if tipcarreg == 0
    debc = [1,2,3,4,5,6]; % GL com deslocamentos prescritos
    ebcVals=[0,0,0,0,0,0];% zeros(length(debc),1);% deslocamentos prescritos
    df = [7,8];% GL com forças impostas
    glcd = 8;% GL de controle em deslocamento (coordenada de ebcVals)
    !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
else
    debc = [1,2,3,4,5,6,7]; % GL com deslocamentos prescritos
    ebcVals=[0,0,0,0,0,0,0];% deslocamentos prescritos
    df = [8];% GL com forças impostas
    glcf = 8;% GL de controle em força (GL de df)
end
glsr = glcf;% GL de saída de resultados (u,R)
elsr = 3;% Elem. de saída de resultados (eps,sigm)
E = [5000, 5000, 5000];% módulo de elasticidade [MPa]
H=E/4;% [MPa]
Et(1:nel) = E(1:nel)*(1 - E(1:nel)/(E(1:nel) + H(1:nel)));% módulo tangente para
    cada elemento
% Controle de convergência
tol = 1e-7;% tolerância de convergência
nmax = 10;% número máximo de iterações
% Iniciação de valores
sigma = zeros(nel,1); novsigma = zeros(nel,1); dsigma = zeros(nel,1);
sigmatent = zeros(nel,1); sigmaced = zeros(nel,1);
epsil = zeros(nel,1); novoepsil = zeros(nel,1); depsil = zeros(nel,1);
defpac = zeros(nel,1); novodefpac = zeros(nel,1);
estado = zeros(nel,1); novestado = zeros(nel,1);
alfa = zeros(nel,1); novoalfa = zeros(nel,1); tolerced = zeros(nel,1);
csitent = zeros(nel,1); dlamb = zeros(nel,1); Cep = zeros(nel,1);
u = zeros(gl,1); du = zeros(gl,1); Ri=zeros(gl,1); Rf = zeros(nel,1);
x1 = zeros(nel,1); y1 = zeros(nel,1); x2 = zeros(nel,1); y2 = zeros(nel,1);
L = zeros(nel,1); ls = zeros(nel,1); ms = zeros(nel,1);
% #####
for step=1:length(factorcarga)
    lambda = factorcarga(step); %incremento de carga
    conv = 1; iter = 1; u = u + du;
    du = zeros(gl,1); % vetor deformacao
    for i=1:nel %igualar a antiga com a nova para cada elemento
        sigma(i)=novsigma(i);
        epsil(i)=novoepsil(i);
        estado(i)=novestado(i);
        defpac(i)=novodefpac(i);
        alfa(i)=novoalfa(i);
    end
    while conv > tol && iter < nmax
        KT = zeros(gl); R = zeros(gl,1);
        if tipcarreg == 0
            ebcVals(glcd)= lambda*uimp;
        else
            R(glcf) = lambda*Pimp;
        end
        for i=1:nel
            lm = lmm(i,:); %cada elemento
            con=conect(i,:); %cada elemento

```

```

x1(i)=nos(conect(i,1),1); y1(i)=nos(conect(i,1),2);%coord
x2(i)=nos(conect(i,2),1); y2(i)=nos(conect(i,2),2);%dos nos
L(i)=sqrt((x2(i)-x1(i))^2+(y2(i)-y1(i))^2); %centro geo
ls(i)=(x2(i)-x1(i))/L(i); ms(i)=(y2(i)-y1(i))/L(i);%
if novestado(i) == 1
    Cep(i) = Et(i);
else
    Cep(i) = E(i);
end
k = Cep(i)*A(i)/L(i)*[ls(i)^2, ls(i)*ms(i), -ls(i)^2, -ls(i)*ms(i);
ls(i)*ms(i), ms(i)^2, -ls(i)*ms(i), -ms(i)^2;
-ls(i)^2, -ls(i)*ms(i), ls(i)^2, ls(i)*ms(i);
-ls(i)*ms(i), -ms(i)^2, ls(i)*ms(i), ms(i)^2];
r = zeros(4,1);
KT(lm, lm) = KT(lm, lm) + k; % soma as matriz rigidez dos 2 elem
R(lm) = R(lm) + r; % soma forças externas dos 2 elem
end
gl = length(R);
df = setdiff(1:gl, debc);%qual é o gl que nao esta prescito
Kf = KT(df, df);%nova matriz rigidez com os gl livres
Rf(1:length(df)) = -Ri(df(1:length(df))) + R(df(1:length(df)))...
    - KT(df(1:length(df)), debc(:))*ebcVals(:);
dfVals = Kf\Rf;
duiter = zeros(gl,1);
duiter(debc(1:length(debc))) = ebcVals(1:length(debc));
duiter(df(1:length(df))) = dfVals(1:length(df));
reactions=zeros(length(debc),1);
reactions(1:length(debc)) = KT(debc(1:length(debc)),:)*duiter(:)...
    + Ri(debc(1:length(debc))) - R(debc(1:length(debc)));
du = du + duiter;
Ri = zeros(gl,1);
for i=1:nel
    lm = lmm(i,:);
    con=conect(i,:);
    T = [ls(i), ms(i), 0, 0; 0, 0, ls(i), ms(i)];
    depsil(i) = (1/L(i))* [-1, 1]*(T*du(lm));%variacao deformacao
    novoepsil(i) = epsil(i) + depsil(i); %novo
    dsigma(i) = E(i)*depsil(i);
    tolerced(i) = sY(i)*1.0e-6; %tolerancia para cedencia
    sigmatent(i) = sigma(i) + E(i)*depsil(i); %tensao tent
    csitent(i) = sigmatent(i) - alfa(i); %tensao deslocada tent
    sigmaced(i) = abs(csitent(i)) - (sY(i)+(1-beta(i))*H(i)*defpac(i)); %
        funcao ceden tent
    switch (estado(i))
        case {0}
            if sigmaced(i) > tolerced
                novestado(i) = 1;
            end
        case {1}
            if sigma(i)*dsigma(i) < 0
                novestado(i) = 0;
            end
        end
    end
    if sigmaced(i) < tolerced % teste cedencia
        novsigma(i) = sigmatent(i);
        novoalfa(i) = alfa(i);
        novodefpac(i) = defpac(i); %esatdo tentativa final
    else

```

```

        dlamb(i) = sigmaced(i)/(E(i)+H(i)); %incremento plastico
        novsigma(i) = sigmatent(i) - sign(csitent(i))*E(i)*dlamb(i); %
            atualizar tensao
        novoalfa(i) = alfa(i) + sign(csitent(i))*beta(i)*H(i)*dlamb(i); %
            atualizar alpha
        novodefpac(i) = defpac(i) + dlamb(i); %atualizar a deformação
    end
    p = A(i)*novsigma(i);
    ri = T' * [-p; p];
    Ri(lm) = Ri(lm) + ri;
end
Rf = R(df); Ff = -Ri(df) + Rf;
conv = (Ff'*Ff)/(1 + Rf'*Rf);
iter = iter + 1;
end
end
% Saída de Resultados
if prtttype == 0
    if beta(1) == 1
        grafi=plot(novoepsil(elsr),novsigma(elsr),'r');
        title('Curva tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend(['Elemento: ' num2str(elsr) ' - Encruamento Cinemático']);
    elseif beta(1) == 0
        grafi=plot(novoepsil(elsr),novsigma(elsr),'b');
        title('Curva tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend(['Elemento: ' num2str(elsr) ' - Encruamento Isotrópico']);
    else
        grafi=plot(novoepsil(elsr),novsigma(elsr),'g');
        title('Curva tensão-Deformação - Força Imposta ');
        xlabel('Deformação'); ylabel('Tensão');
        legend(['Elemento: ' num2str(elsr) ' - Encruamento Independente']);
    end

elseif prtttype == 1
    if beta(1) == 1
        grafi=plot(u(glsr)+du(glsr),Ri(glsr),'r');
        title('Curva Força-Deslocamento - Força Imposta ');
        xlabel('Deslocamento'); ylabel('Força');
        legend('Cinemático');
    elseif beta(1) == 0
        grafi=plot(u(glsr)+du(glsr),Ri(glsr),'b');
        title('Curva Força-Deslocamento - Força Imposta ');
        xlabel('Deslocamento'); ylabel('Força');
        legend('Isotrópico');
    else
        grafi=plot(u(glsr)+du(glsr),Ri(glsr),'g');
        title('Curva Força-Deslocamento - Força Imposta ');
        xlabel('Deslocamento'); ylabel('Força');
        legend('Independente');
    end
end
hold on; grid on;
end % Fim

```



# Bibliografia

- [1] F. Teixeira-Dias, J. Pinho-da Cruz, R.A.F. Valente, R.J.A. Sousa. *Método dos Elementos Finitos — Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia*, ETEP — Edições Técnicas e Profissionais, Lisboa, 2010.
- [2] M.A. Bhatti. *Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures: With Mathematica and MATLAB Computations*, John Wiley & Sons, Inc., Nova Iorque, 2006.
- [3] P.S.P. Pião. Modelação e Simulação Numérica de Processos de Conformação Plástica de Metais, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Aveiro, Portugal, 2010.
- [4] J.A.M. Pinho-da-Cruz. *Caracterização Termomecânica de Materiais Multifásicos Utilizando Procedimentos de Homogeneização*, Dissertação de Tese de Doutoramento, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Aveiro, Portugal, 2007.
- [5] A.S. Khan e S. Huang. *Continuum Theory of Plasticity*, 4.<sup>a</sup> edição, John Wiley & Sons, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1995.
- [6] J.C. Simo e T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*, Interdisciplinary Applied Mathematics — Mechanics and Materials, Vol. 7, Springer-Verlag, Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1998.
- [7] W. Prager. The Theory of Plasticity: A Survey of Recent Achievements. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, **169**(1):41–57, 1955.
- [8] N.-H. Kim. *Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Springer, Nova Iorque, 2015.
- [9] T.B. Stoughton. A Non-Associated Flow Rule for Sheet Metal Forming, *International Journal of Plasticity* **18**(5):687–714, 2002.
- [10] F. Dunne e N. Petrinic. *Introduction to Computational Plasticity*, Oxford University Press, Oxford, 2005.
- [11] *Module 4: Review of Plasticity Concepts — Lectures 15-20*; <http://nptel.ac.in/courses/105108072/mod04/lec4.html>. (Consultado a: 9/12/2017)
- [12] W.-F. Chen e D.-J. Han. *Plasticity for Structural Engineers*, Springer, Berlim, 1988.
- [13] R.I. Borja. *Plasticity: Modeling & Computation*, Springer, Berlim, 2013.

- [14] L.L. Yaw. *Nonlinear Static — 1D Plasticity — Isotropic and Kinematic Hardening*, Walla Walla University, Washington, Estados Unidos da América, 2017.
- [15] W.-F. Chen e H. Zhang. *Structural Plasticity — Theory, Problems and CAE Software*, Springer, Nova Iorque, 1991.